

SÉRIE RESUMO INTELIGENTE

FUNÇÕES MATEMÁTICAS

com 250 exercícios resolvidos

José Antonio Farias Coelho



Estácio

Centro Universitário



Estácio | FIC

José Antônio Farias Coelho

Funções

Matemáticas

com 250 exercícios resolvidos

1ª Edição

Série Resumo Inteligente

CENTRO UNIVERSITÁRIO
ESTÁCIO DO CEARÁ



Fortaleza – Ceará
2018

Copyright 2018. José Antônio Farias Coelho

Revisão Ortográfica

Marineide Meireles Nogueira

Normalização e Padronização

Luiza Helena de Jesus Barbosa

Capa

Janete Pereira do Amaral

Programação Visual e Diagramação

Janete Pereira do Amaral

Revisão de ABNT

Luiza Helena de Jesus Barbosa

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte

C672f Coelho, José Antônio Farias

Funções matemáticas: com 250 exercícios resolvidos /
José Antônio Farias Coelho. Fortaleza: Centro Universitário
Estácio do Ceará, 2018.
111f.; 30cm.

ISBN: 978-85-69235-21-7

1. Matemática 2. Funções matemáticas I. Coelho, José
Antônio Farias II. Centro Universitário Estácio do Ceará

CDD 510

Luiza Helena de Jesus Barbosa - CRB-3/830

CENTRO UNIVERSITÁRIO ESTÁCIO DO CEARÁ

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa e Extensão

Núcleo de Publicações Acadêmico-Científicas

CONSELHO EDITORIAL

Dr. Alberto Sampaio Lima - Universidade Federal do Ceará

Dra. Ana Cristina Pelosi - Universidade Federal do Ceará

Ms. Ana Flávia Alcântara Rocha Chaves - Centro Universitário Estácio do Ceará

Dra. Andrine Oliveira Nunes - Centro Universitário Estácio do Ceará

Ms. Janete Pereira do Amaral - Centro Universitário Estácio do Ceará

Ms. Joana Mary Soares Nobre - Centro Universitário Estácio do Ceará

Dra. Kariane Gomes Cezario - Centro Universitário Estácio do Ceará

Dra. Letícia Adriana Pires Ferreira dos Santos - Centro Universitário Estácio do Ceará, Universidade Estadual do Ceará, Universidade Federal do Ceará

Dra. Marcela Magalhães de Paula - Embaixada do Brasil na Itália

Dra. Maria Elias Soares – Universidade Federal do Ceará e Universidade Estadual do Ceará

Dra. Maria da Graça de Oliveira Carlos – Centro Universitário Estácio do Ceará

Dra. Margarete Fernandes de Sousa – Universidade Federal do Ceará

Dra. Rosiléia Alves de Sousa – Centro Universitário Estácio do Ceará

Dra. Suelene Silva Oliveira Nascimento - Universidade Estadual do Ceará

Dr. Vasco Pinheiro Diógenes Bastos - Centro Universitário Estácio do Ceará

Núcleo de Publicações Acadêmico-Científicas

Rua Vicente Linhares, 308 - Aldeota

CEP: 60.135-270 - Fortaleza – CE - Fone: (85) 3456-4100

www.publica-estaciofic.com.br



O AUTOR

José Antônio Farias Coelho

Graduado em Tecnologia da Construção Civil pela Universidade Estadual Vale do Acaraú (1990), cursou MBA em Comércio eletrônico na Universidade de Fortaleza (2004), Especialização em Gestão de APL na Universidade de Fortaleza (2010), Mestrado Acadêmico em Administração de Empresas na UECE (2013). Atualmente cursa Especialização em Metodologia do Ensino da Matemática na Estácio (2016).

Professor do Centro Universitário Estácio do Ceará em cursos de graduação nas áreas de engenharia e arquitetura e Coordenador dos cursos de pós-graduação em Engenharia Ambiental e Saneamento Básico e Logística Empresarial. Presidente da Comissão organizadora da Semana de Engenharia da Unidade Centro do Centro Universitário Estácio do Ceará. Membro da Comissão Própria de Avaliação – CPA.

PREFÁCIO

Formatamos este livro em um conteúdo resumido, mas, didaticamente apresentado, na busca de facilitar a compreensão do leitor, contudo longe de ser o recurso final do aprendizado sobre funções, que é ao mesmo tempo belo e complexo.

O tratamento matemático destas relações facilita muito a análise e compreensão das mesmas, e por isso o estudo das funções matemáticas é tão importante em todas as áreas do conhecimento.

Assim, trataremos neste livro do estudo das funções elementares e mais utilizadas, considerando neste momento, apenas as funções que dependem de uma única variável e fazendo uma abordagem mais compreensiva, sem preocupação com as demonstrações e o rigor matemático.

“Sem treino, sem chance”, respaldado nesta expressão, disponibilizamos um capítulo especial com 250 exercícios gabaritados, na certeza de que somente praticando se assimila a teoria.

Críticas e sugestões hão de surgir. E serão bem-vindas. Restamos o consolo de ter envidado esforços para empregar utilmente o nosso tempo. “A censura que nos for feita – se faz oportuno Souza Pinto – há de ser mitigada pelo censor se ele chegar a ter consciência de nossa boa vontade em acertar”.

José Antônio Farias Coelho

SUMÁRIO

1. FUNÇÃO.....	7
1.1 Definição.....	7
1.2 Domínio, imagem e contradomínio	9
1.3 Funções: injetora, sobrejetora e bijetora.....	10
1.4 Função Constante.....	12
2. FUNÇÃO AFIM.....	13
2.1 Função crescente - Função decrescente	13
2.2 Raiz ou zero de uma função do 1º grau.....	14
2.3 O coeficiente angular (taxa de crescimento)	15
2.4 O coeficiente linear	15
2.5 Estudo do Sinal de uma Função Afim.....	16
2.6 Inequação Produto	16
2.7 Inequação quociente	17
2.8 Aplicações	18
3. FUNÇÃO MODULAR.....	21
3.1 Módulo (ou valor absoluto) de um número.....	21
3.2 Equações modulares	21
3.3 Definição.....	22
3.4 Gráfico da função modular.....	23
4. FUNÇÃO QUADRÁTICA.....	25
4.1 O Gráfico.....	25
4.2 Pontos de interseção da parábola com o eixo Ox.....	27

4.3 Pontos de intersecção da parábola com o eixo Oy	28
4.4 Aplicações	35
5. FUNÇÃO EXPONENCIAL	43
5.1 Potenciação e suas propriedades	43
5.2 Equações exponenciais	44
5.3 Aplicações da função exponencial	47
6. FUNÇÃO LOGARÍTMICA	49
6.1 Definição de logaritmos	49
6.2 Propriedades dos logaritmos	49
6.3 Equações Logarítmicas	50
6.4 Definição de função logarítmica	51
6.5 O gráfico	51
6.6 Aplicações	52
7. FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA	55
7.1 Arcos e Ângulos	56
7.2 Medidas de arcos e ângulos	57
7.3 Círculo trigonométrico	57
7.4 Razão seno e razão cosseno	60
7.5 Identidades Trigonométricas	61
8. FUNÇÃO LIMITE	65
8.1 Conceito histórico	65
8.2 Objetivo	68
8.3 Teoremas	71
9. COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES	75
9.1 Funções Inversas	77
10. SEM TREINO SEM CHANCE	81

GABARITO	105
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	109

1. FUNÇÃO

O conceito de função está relacionado à ideia de associação de um elemento a outro, segundo uma regra específica.

Assim, por exemplo, podemos considerar o tamanho de uma população relacionado apenas ao tempo (ou variando em função da variação do tempo), ou associado ao tempo e ao espaço, ou a qualquer outro fator que interfira na população em estudo; o preço de um produto pode estar associado apenas ao seu custo de produção, ou ao seu custo e à margem de lucro do fabricante, ou ainda, ao seu custo, à margem de lucro do fabricante e à demanda; o volume de uma esfera pode estar associado apenas ao tamanho de seu raio, porém o raio pode variar com o tempo e assim, o volume estará variando também com a variação do tempo; e assim por diante.

Como podemos observar, o conceito de função envolve uma relação de dependência, onde um elemento depende de outro ou de vários outros, os quais podem variar livremente.

Como a variação de um deles acarreta na variação do que depende dele, chamamo-nos de elementos variáveis ou simplesmente variáveis.

Deste modo, para cada associação, temos uma variável dependente e uma ou mais, independentes.

Chamaremos de função à variável dependente e simplesmente de variáveis, às variáveis independentes, o que é bem intuitivo, uma vez que um elemento varia em função da variação daquele do qual depende.

1.1 Definição

Uma função matemática é uma relação entre dois conjuntos quaisquer que associa, a cada elemento de partida, denominado domínio, um único elemento de um conjunto de chegada, denominado contradomínio.

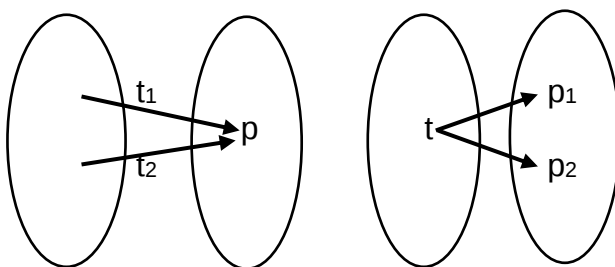
Os elementos do conjunto contradomínio que são imagem de algum elemento do domínio constituem o conjunto imagem da função.

Da definição acima podemos observar que uma função matemática é uma relação particular entre dois conjuntos, onde a premissa básica é a de que cada elemento do domínio possui uma única imagem, segundo aquela regra ou função.

Do ponto de vista prático, podemos considerar, por exemplo, que se uma função descreve a posição de um objeto em movimento, a qual varia com o tempo, é sabido que em um dado instante o objeto não poderá ocupar duas posições diferentes, embora em dois instantes diferentes ele possa ocupar a mesma posição.

Isso significa que dois ou mais elementos do domínio podem ter a mesma imagem, porém um elemento não pode ter várias imagens diferentes.

O esquema abaixo ilustra tal situação, onde o diagrama da esquerda representa o gráfico de uma função, enquanto que o da direita não.



Uma função pode ser representada por vários meios, como por exemplo, o diagrama acima, ou uma expressão matemática, um gráfico, uma expressão verbal, dentre outros. A expressão matemática e o gráfico são as formas mais utilizadas no estudo matemático.

A expressão matemática de uma função f que a cada ponto t de um conjunto A associa um ponto $f(t)$ de um conjunto B é dada por:

$$f : A \rightarrow B$$

Neste caso, A é o domínio e B é o contradomínio de f .

O gráfico de uma função f é o subconjunto do plano xy dado por:

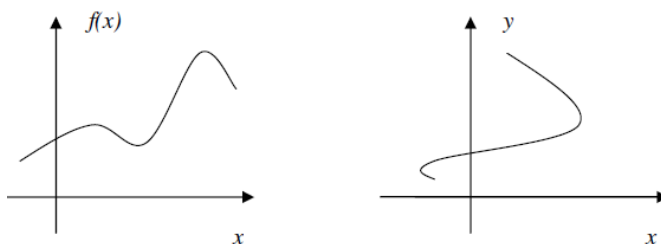
$$G = \{(x, y) \in R^2 : y = f(x)\},$$

Que é posicionado num sistema de eixos cartesianos, onde o eixo horizontal contém a variável independente x (domínio), o eixo vertical contém a variável dependente $y = f(x)$ (imagem), os eixos se cruzam na

origem e o sentido de crescimento se dá da esquerda para a direita e de baixo para cima.

Assim, o gráfico de uma função real descreve uma curva no plano, a qual representa o seu comportamento e facilita muito o seu entendimento. É, portanto, uma ferramenta básica no estudo de cálculo.

Na figura seguinte observamos dois gráficos, sendo que o da esquerda representa o gráfico de uma função, enquanto que o da direita não, uma vez que existem valores de x com dois y correspondentes.



Como podemos ver, a representação gráfica nos permite saber se um gráfico representa ou não uma função. Para isso basta traçarmos retas paralelas ao eixo y e ver quantas vezes estas retas interceptam a curva; se interceptar mais de um a vez, então a curva não é gráfico de função.

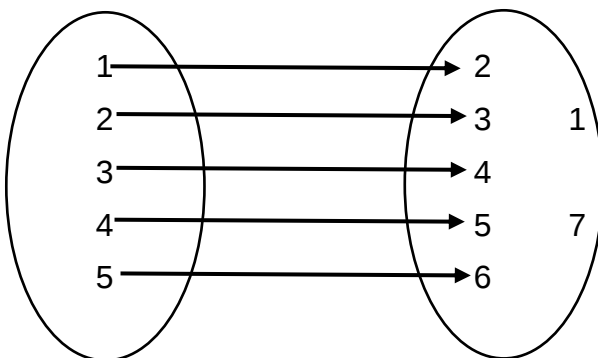
1.2 Domínio, imagem e contradomínio

A lei de formação que intitula uma determinada função, possui três características básicas: domínio, contradomínio e imagem. Essas características podem ser representadas por um diagrama de flechas, observe:

Dada a seguinte função $f(x) = x + 1$, e os conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Vamos construir o diagrama de flechas:



Nessa situação, temos que:

Domínio: representado por todos os elementos do conjunto A (1, 2, 3, 4, 5)

Contradomínio: representado por todos os elementos do conjunto B (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

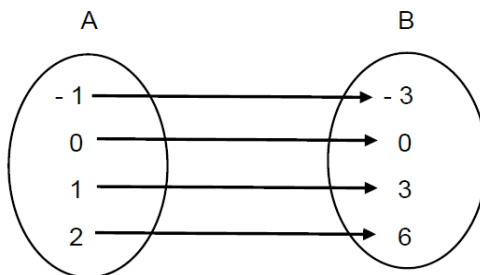
Imagem: representada pelos elementos do contradomínio (conjunto B) que possuem correspondência com o domínio (conjunto A). (2, 3, 4, 5, 6)

O conjunto domínio possui algumas características especiais que definem ou não uma função. Observe: “Todos os elementos do conjunto domínio devem possuir representação no conjunto do contradomínio. Caso isso não ocorra, a lei de formação não pode ser uma função”.

1.3 Funções: injetora, sobrejetora e bijetora

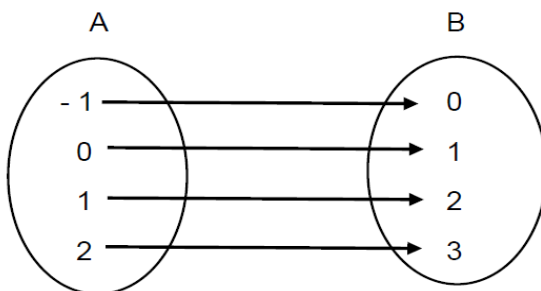
- **Função injetora:** uma função é injetora se os elementos distintos do domínio tiverem imagens distintas.

Por exemplo, dada a função $f : A \rightarrow B$, tal que $f(x) = 3x$.



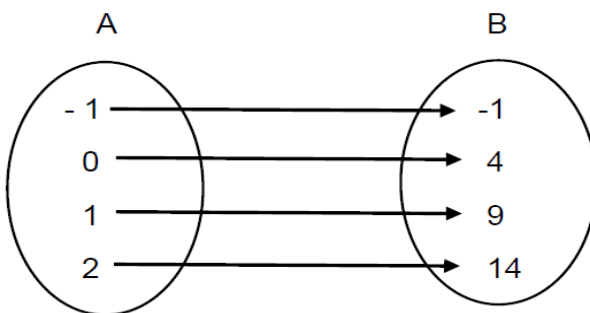
- **Função sobrejetora:** uma função é sobrejetora se, e somente se, o seu conjunto imagem for especificadamente igual ao contradomínio, $\text{Im} = B$.

Por exemplo, se temos uma função $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $y = x + 1$ ela é sobrejetora, pois $\text{Im} = \mathbb{Z}$.



- **Função bijetora:** uma função é bijetora se ela é injetora e sobrejetora.

Por exemplo, a função $f: A \rightarrow B$, tal que $f(x) = 5x + 4$.



Note que ela é injetora, pois $x_1 \neq x_2$ implica em $f(x_1) \neq f(x_2)$.

É sobrejetora, pois para cada elemento em B existe pelos menos um em A , tal que $f(x) = y$.

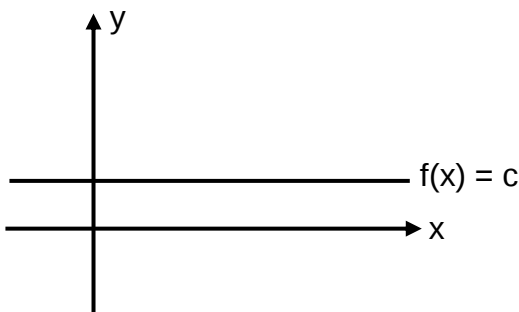
1.4 Função Constante

Na função constante, independentemente de qual seja o valor do domínio, ela sempre terá a mesma imagem. A fórmula geral dessa função é representada por:

$$f(x) = c$$

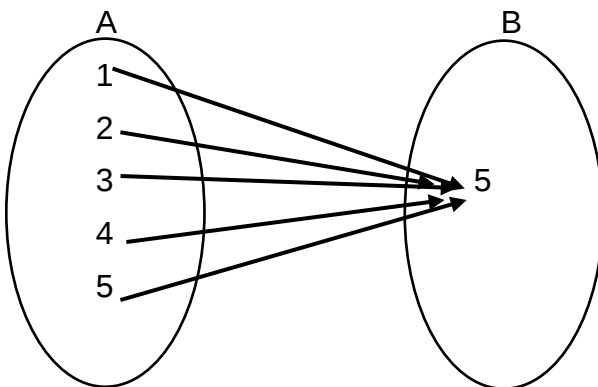
O gráfico da função constante é bidimensional e sempre será uma reta horizontal em relação ao eixo x . Isso acontece porque a imagem é constante.

No gráfico, utilizamos as coordenadas do plano cartesiano x e y . Recorde-se de que x é o eixo das abscissas, e y , o das ordenadas.



A representação da relação estabelecida por uma função constante por meio do diagrama de flechas assemelha-se com a representação da imagem a seguir, pois, independentemente dos valores pertencentes ao domínio, a imagem é sempre composta por um único elemento.

Por exemplo, a função $f: A \rightarrow B$, tal que $f(x) = 5$



2. FUNÇÃO AFIM

Uma função definida por $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes a, b que pertencem ao conjunto dos reais tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A lei que define função afim é:

$f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, pois sendo $a = 0$ teremos uma função constante.

Exemplos de função afim:

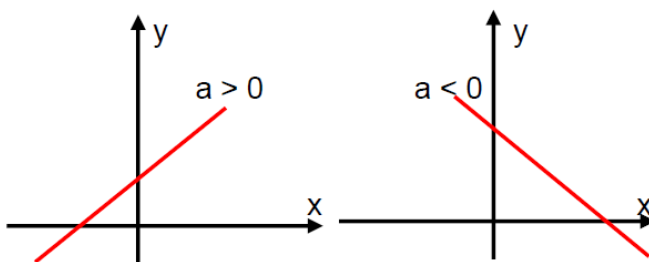
a) $y = 2x + 3$ em que $a = 2$ e $b = 3$

b) $y = -12x$ em que $a = -12$ e $b = 0$

A representação gráfica de uma função do 1º grau é uma reta.

Analisando a lei de formação $y = ax + b$, notamos a dependência entre x e y , e identificamos dois números: a e b .

Eles são os coeficientes da função, o valor de a indica se a função é crescente ou decrescente e o valor de b indica o ponto de intersecção da função com o eixo y no plano cartesiano. Observe:



2.1 Função crescente - Função decrescente

Função crescente: à medida que os valores de x aumentam, os valores correspondentes em y também aumentam.

- **Função decrescente:** à medida que os valores de x aumentam, os valores correspondentes de y diminuem.

2.2 Raiz ou zero de uma função do 1º grau

Para determinar a raiz ou o zero de uma função do 1º grau é preciso considerar $y = 0$.

De acordo com gráfico, no instante em que y assume valor igual a zero, a reta intersecta o eixo x em um determinado ponto, determinando a raiz ou o zero da função.

Exemplo:

Determinar a raiz das funções a seguir:

$$y = 4x + 2 \quad \rightarrow \text{faz-se } y = 0$$

$$4x + 2 = 0 \rightarrow 4x = -2 \rightarrow x = -2/4 \rightarrow x = -1/2$$

A reta representada pela função $y = 4x + 2$ intersecta o eixo x no seguinte valor: $-1/2$

$$y = -2x + 10 \quad \rightarrow \text{faz-se } y = 0$$

$$-2x + 10 = 0 \rightarrow -2x = -10 \quad (-1) \rightarrow 2x = 10 \rightarrow$$

$$x = 10/2 \rightarrow x = 5$$

A reta representada pela função $y = -2x + 10$ intersecta o eixo x no seguinte valor: 5

$$y = -7x + 7 \quad \rightarrow \text{faz-se } y = 0$$

$$-7x + 7 = 0 \rightarrow -7x = -7 \rightarrow x = 1$$

A reta representada pela função $y = -7x + 7$ intersecta o eixo x no seguinte valor: 1

$$y = 3x \quad \rightarrow \text{faz-se } y = 0$$

$$3x = 0 \rightarrow x = 0$$

A reta representada pela função $y = 3x$ intersecta o eixo x no seguinte valor: 0

2.3 O coeficiente angular (taxa de crescimento)

Dada uma função $f(x) = ax + b$, o termo **a** é denominado de taxa de crescimento ou de coeficiente angular (em caso de gráfico), porque é ele que determina o quanto a função cresce.

Exemplo:

Um táxi cobra um valor fixo de bandeirada no valor de R\$ 5,20 e a cada quilômetro rodado cobra um valor adicional de R\$ 3,00. Determine a função que modela o preço da corrida em função dos quilômetros rodados.

Caso uma pessoa entre no táxi e não ande, o preço da corrida será de R\$ 5,20.

Ao andar 1 quilômetro, o preço subirá para R\$ 8,20.

Ao andar 2 quilômetros, o preço será de R\$ 11,20.

Repare que a taxa de crescimento a cada quilômetro é de R\$ 3,00, logo, a taxa de crescimento da função é 3 e a lei de formação será $f(x) = 3x + 5,20$, onde x é a quantidade de quilômetros rodados.

2.4 O coeficiente linear

Dada uma função afim $f(x) = ax + b$, **b** é o coeficiente linear da função.

A partir do coeficiente linear, é possível determinar onde o gráfico da função afim intersecta o eixo das ordenadas e isso acontece com o $x=0$.

Exemplo:

$$f(x) = 3x + 2$$

A função irá intersectar a o eixo das ordenadas no ponto (0,2)

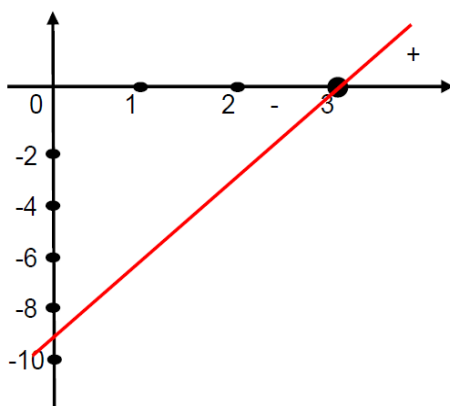
$$f(0) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

2.5 Estudo do Sinal de uma Função Afim

Estudar a variação do sinal de uma função polinomial do 1º grau nada mais é que identificar para quais valores de x temos $f(x)$ com valor **negativo**, **nulo** ou **positivo**.

Vamos fazer o gráfico da função $f(x) = 3x - 9$ e analisá-lo deste outro ponto de vista.

Sabemos que a reta será crescente, pois o $a > 0$, a raiz da função é $x = 3$ e que o ponto onde a reta cortará o eixo das ordenadas é $y = -9$, montando o gráfico temos:



Para valores de x menores que a raiz, isto é, $x < 3$, vemos que $f(x) < 0$ (negativo), pois estes pontos estão abaixo do eixo das abscissas.

Para valores de x iguais à raiz temos que a função é nula, isto é, $f(x) = 0$.

Para valores de x maiores que a raiz, ou seja, $x > 3$, vemos no gráfico que $f(x) > 0$ (positivo), já que estes pontos estão acima do eixo das abscissas.

2.6 Inequação Produto

Resolver uma inequação produto consiste em encontrar os valores de x que satisfazem a condição estabelecida pela inequação.

Para isso utilizamos o estudo do sinal de uma função.

Observe a resolução da seguinte equação produto: $(2x + 6) \cdot (-3x + 12) > 0$.

Vamos estabelecer as seguintes funções:

$$y_1 = 2x + 6 \text{ e } y_2 = -3x + 12.$$

Determinando a raiz da função ($y = 0$) e a posição da reta ($a > 0$ crescente e $a < 0$ decrescente).

$$y_1 = 2x + 6 \rightarrow 2x + 6 = 0 \rightarrow 2x = -6 \rightarrow x = -3$$

$$y_2 = -3x + 12 \rightarrow -3x + 12 = 0 \rightarrow -3x = -12 \rightarrow$$

$$x = 4$$

Verificando o sinal da inequação produto $(2x + 6) \cdot (-3x + 12) > 0$.

Observe que a inequação produto exige a seguinte condição: os possíveis valores devem ser maiores que zero, isto é, positivo.

		-3		4	
y_1	-	●	+	●	+
y_2	+	●	+	●	-
$y_1 \cdot y_2$	-	●	+	●	-

Através do esquema que demonstra os sinais da inequação produto $y_1 \cdot y_2$, podemos chegar à seguinte conclusão quanto aos valores de x :

$$x \in \mathbb{R} / -3 < x < 4$$

2.7 Inequação quociente

Na resolução da inequação quociente utilizamos os mesmos recursos da inequação produto, o que difere é que, ao calcularmos a função do denominador, precisamos adotar valores maiores ou menores que zero e nunca igual a zero.

Observe a resolução da seguinte inequação quociente:

$$\frac{x+1}{2x-1} \leq 0$$

Resolver as funções $y_1 = x + 1$ e $y_2 = 2x - 1$, determinando a raiz da função ($y = 0$) e a posição da reta ($a > 0$ crescente e $a < 0$ decrescente).

$$y_1 = x + 1 \rightarrow x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$

$$y_2 = 2x - 1 \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = 1/2$$

		-1		1/2	
		●		●	
y_1	-		+		+
y_2	-		-		+
$y_1 \cdot y_2$	+		-		+
		●		●	

Com base no jogo de sinal concluímos que x assume os seguintes valores na inequação quociente:

$$x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 1/2$$

2.8 Aplicações

a) Na produção de peças, uma fábrica tem um custo fixo de R\$ 16,00 mais um custo variável de R\$ 1,50 por unidade produzida. Sendo x o número de peças unitárias produzidas, determine:

- A lei da função que fornece o custo da produção de x peças;
- Calcule o custo de produção de 400 peças.

Solução:

$$f(x) = 1,5x + 16$$

$$f(400) = 1,5 \cdot 400 + 16$$

$$f(400) = 600 + 16$$

$$f(400) = 616$$

O custo para produzir 400 peças será de R\$ 616,00.

- b) Um carro está localizado no Km 16 de uma rodovia retilínea no instante $t = 0$. Ele está se movendo a uma velocidade constante de 80 km/h. Determine:

- A função horária do movimento do carro.

Solução:

Sabemos que a função horária é dada por $S = S_0 + vt$

Segue que:

$$S_0 = 16 \text{ e } v = 80 \text{ km/h}$$

Assim,

$$S = 16 + 80t$$

- Determine a posição que o carro estará no instante $t = 1,5$

Solução:

Para determinar a posição no instante $t = 1,5$ basta substituir esse valor na função horária do movimento. Assim, teremos:

$$S = 16 + 80 \cdot 1,5$$

$$S = 16 + 120 = 136 \text{ km}$$

- c) O custo de uma corrida de táxi é constituído por um valor inicial Q_0 fixo, mais um valor que varia proporcionalmente à distância D percorrida nessa corrida.

Sabe-se que, em uma corrida na qual foram percorridos 3,6km, a quantia cobrada foi de R\$8,25 e que em outra corrida, de 2,8km a quantia cobrada foi de R\$7,25.

- Calcule o valor inicial Q_0 .
- Se, em um dia de trabalho, um taxista arrecadou R\$75,00 em 10 corridas, quantos quilômetros seu carro percorreu naquele dia?

Resolução:

Seja Q o valor de uma corrida, então $Q = Q_0 + k \cdot D$ onde k é o custo de 1km percorrido.

$$1^\circ \text{ corrida: } 8,25 = Q_0 + k \cdot 3,6.$$

$$2^\circ \text{ corrida } 7,25 = Q_0 + k \cdot 2,8.$$

Subtraímos as duas igualdades e obtemos $1 = k \cdot 0,8$ donde $k = 1,25$.

Da primeira igualdade temos $8,25 - 1,25 \cdot 3,6 = Q_0$.

Resposta: Q_0 é igual a R\$ 3,75

O taxista, em 10 corridas, arrecadou R\$ 75,00. Este valor inclui 10 vezes o valor inicial, isto é, R\$ 37,50. Como $75,00 = 37,50 + 1,25 \cdot D$, teremos

$$D = \frac{37,50}{1,25} = 30.$$

Resposta: O taxista percorreu, naquele dia, 30 km

3. FUNÇÃO MODULAR

3.1 Módulo (ou valor absoluto) de um número

O módulo (ou valor absoluto) de um número real x , que se indica por $|x|$ é definido da seguinte maneira:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Então:

→ se x é positivo ou zero, $|x|$ é igual ao próprio x .

Exemplos: $|2| = 2$; $|1/2| = 1/2$; $|15| = 15$

→ se x é negativo, $|x|$ é igual a $-x$.

Exemplos: $|-2| = -(-2) = 2$; $|-20| = -(-20) = 20$

O módulo de um número real é sempre positivo ou nulo. O módulo de um número real nunca é negativo.

3.2 Equações modulares

Toda a equação que contiver a incógnita em um módulo num dos membros será chamada equação modular.

Exemplos:

a) $|x^2 - 5x| = 1$

b) $|x + 8| = |x^2 - 3|$

Algumas equações modulares resolvidas:

a) **Resolver a equação $|x^2 - 5x| = 6$.**

Resolução: Temos que analisar dois casos:

caso 1: $x^2 - 5x = 6$

caso 2: $x^2 - 5x = -6$

Resolvendo o caso 1:

$$x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x' = 6 \text{ e } x'' = -1.$$

Resolvendo o caso 2:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x' = 3 \text{ e } x'' = 2.$$

Resposta: $S = \{-1, 2, 3, 6\}$

b) **Resolver a equação** $|x - 6| = |3 - 2x|$.

Resolução: Temos que analisar dois casos:

$$\text{caso 1: } x - 6 = 3 - 2x$$

$$\text{caso 2: } x - 6 = -(3 - 2x)$$

Resolvendo o caso 1:

$$x - 6 = 3 - 2x \Rightarrow x + 2x = 3 + 6 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

Resolvendo o caso 2:

$$x - 6 = -(3 - 2x) \Rightarrow x - 2x = -3 + 6 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3$$

Resposta: $S = \{-3, 3\}$

3.3 Definição

Chamamos de função modular a função $f(x) = |x|$ definida por:

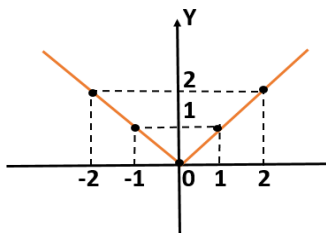
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Observe, então, que a função modular é uma função definida por duas sentenças.

3.4 Gráfico da função modular

Vamos construir o gráfico da função $f(x)=|x|$:

x	y=f(x)
-1	1
-2	2
0	0
1	1
	2



4. FUNÇÃO QUADRÁTICA

Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a , b e c são números reais e $a \neq 0$.

Vejamos alguns exemplos de função quadráticas:

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 1, \text{ onde } a = 3, b = -4 \text{ e } c = 1$$

$$f(x) = x^2 - 1, \text{ onde } a = 1, b = 0 \text{ e } c = -1$$

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 5, \text{ onde } a = 2, b = 3 \text{ e } c = 5$$

$$f(x) = -x^2 + 8x, \text{ onde } a = -1, b = 8 \text{ e } c = 0$$

$$f(x) = -4x^2, \text{ onde } a = -4, b = 0 \text{ e } c = 0$$

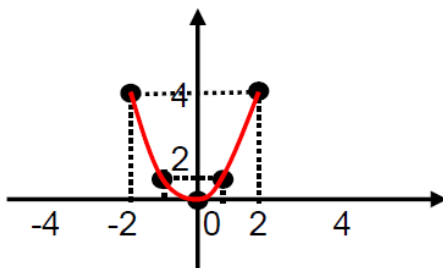
4.1 O Gráfico

O gráfico de uma função polinomial do 2º grau, $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma curva chamada parábola.

Exemplo:

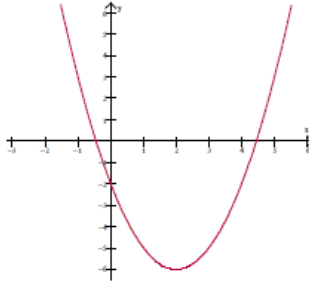
Vamos construir o gráfico da função $y = x^2$:

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

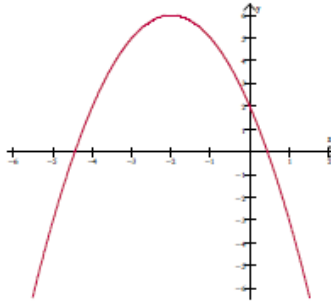


Primeiro atribuímos a x alguns valores, depois calculamos o valor correspondente de y e, em seguida, ligamos os pontos assim obtidos.

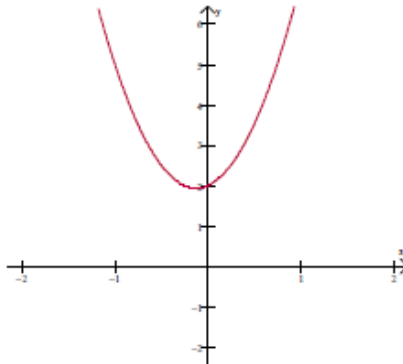
$$f(x) = x^2 - 4x - 2$$



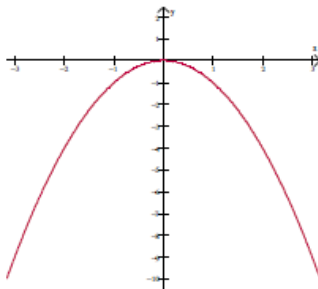
$$f(x) = -x^2 - 4x - 2$$



$$f(x) = x^2 - 4x - 2$$



$$f(x) = -x^2$$



Podemos destacar em uma parábola três pontos notáveis, ou seja, com esses pontos podemos construir com mais facilidade um gráfico de uma função do 2º grau. Eles se dividem em: pontos de intersecção da parábola com o eixo Ox , pontos de intersecção da parábola com o eixo Oy e vértices da parábola.

4.2 Pontos de intersecção da parábola com o eixo Ox

Esses pontos podem ou não existir. Caso existam iremos obtê-los resolvendo a função $y = ax^2 + bx + c$, atribuímos valor zero para y , transformando em uma equação do segundo grau: $ax^2 + bx + c = 0$, sendo a , b e c seus coeficientes com $a \neq 0$.

A resolução dessa equação nos permitirá encontrar o valor do discriminante Δ , esse irá determinar em quantos pontos a parábola irá cortar o eixo Ox .

$\Delta > 0$; o eixo Ox será cortado pela parábola em dois pontos distintos, pois $x' \neq x''$.

$\Delta = 0$; o eixo Ox será cortado pela parábola em um único ponto, pois $x' = x''$.

$\Delta < 0$; a parábola não corta o eixo Ox .

4.3 Pontos de intersecção da parábola com o eixo Oy

O ponto no qual a parábola cortará o eixo Oy dependerá do valor do coeficiente c , ou seja, se $c = 2$ isso significa que a parábola irá cortar o eixo Oy no ponto de coordenada 2.

Portanto, podemos concluir que o ponto de intersecção da parábola com o eixo Oy, de uma forma geral, ficará igual a $(0, c)$.

Vértices da parábola

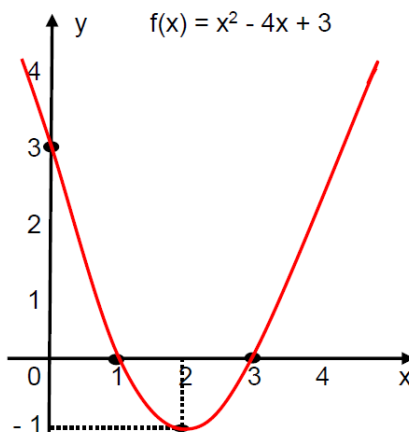
Esse ponto é determinado pelo par ordenado $V(x_v \text{ e } y_v)$. Eles são determinados pelas seguintes fórmulas:

$$x_v = -b / 2a \quad e \quad y_v = -\Delta / 4a$$

Estudo do Sinal de uma Função Quadrática

Estudar a variação do sinal de uma função polinomial do 2º grau é identificar para quais valores de x temos $f(x)$ com valor negativo, nulo ou positivo.

Vamos analisar novamente o gráfico da função:



Para $x < 1$ ou $x > 3$, vemos no gráfico que $f(x) > 0$, já que estes pontos estão acima do eixo das abscissas.

Para $x = 1$ ou $x = 3$ temos que a função é nula, isto é, $f(x) = 0$.

Para $x > 1$ e $x < 3$ vemos no gráfico que $f(x) < 0$, visto que estes pontos estão abaixo do eixo das abscissas.

Então para a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$, temos que:

A função é negativa para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ e } x < 3\}$.

A função é nula para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 1 \text{ ou } x = 3\}$.

A função é positiva para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$.

A representação também pode ser assim realizada:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\} \Rightarrow f(x) < 0$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x = 1 \text{ ou } x = 3\} \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\} \Rightarrow f(x) > 0$$

Inequação do 2º grau

Uma **inequação do 2º grau** na incógnita x é uma expressão do 2º grau que pode ser escrita numa das seguintes formas:

$$ax^2 + bx + c > 0;$$

$$ax^2 + bx + c < 0;$$

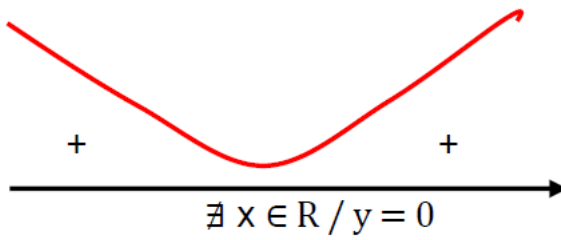
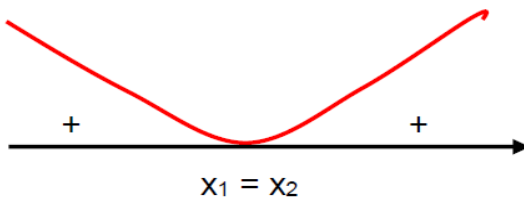
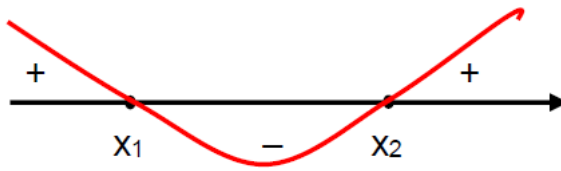
$$ax^2 + bx + c \geq 0;$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0.$$

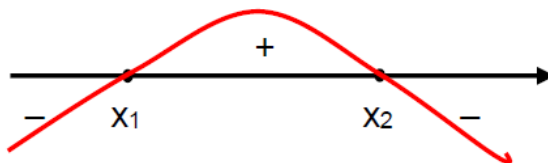
Para resolvermos uma inequação do Segundo grau devemos estudar o sinal da função correspondente equação.

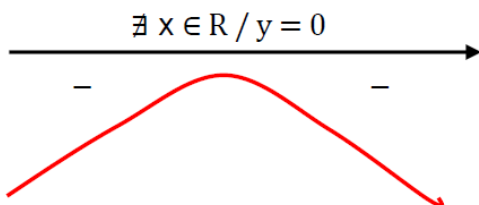
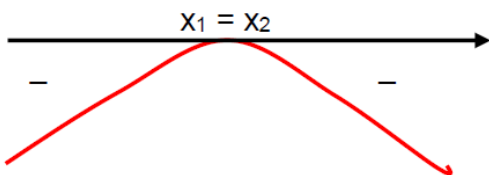
1. Igualar a sentença do 2º grau a zero;
2. Localizar e (se existir) as raízes da equação no eixo x .
3. Estudar o sinal da função correspondente, tendo-se como possibilidades

$$a > 0$$



$$a < 0$$

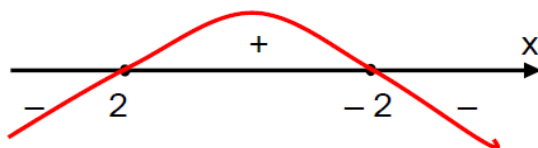




Exemplo: Resolva a inequação $-x^2 + 4 \geq 0$.

Solução:

$$-x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = 2 \rightarrow x_2 = -2$$



Inequações do 2º Grau - Inequação Produto e Inequação Quociente

Algumas inequações apresentam, no 1º membro, produto de funções que para obter a resolução dessas inequações é preciso fazer o estudo do sinal de todas as funções, a solução seria a intersecção do estudo dos sinais das funções que pertencem à inequação.

Para compreender melhor como funciona o encontro do conjunto solução de uma **inequação produto** acompanhe o raciocínio dos exemplos seguintes.

$$\text{Exemplo: } (2x - 10) (x^2 - 5x + 6) > 0$$

$$f(x) = 2x - 10$$

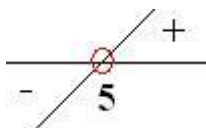
Primeiro o estudo do sinal de cada função:

$$2x - 10 = 0$$

$$2x = 10$$

$$x = 10 : 2$$

$$x = 5$$



$$g(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6$$

$$\Delta = 25 - 24$$

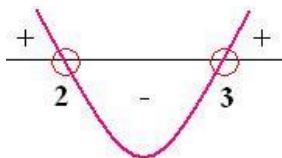
$$\Delta = 1$$

$$x = 5 \pm 1$$

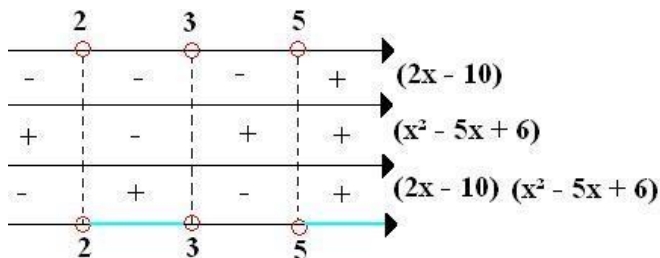
$$2$$

$$x' = 3$$

$$x'' = 2$$



Fazendo o jogo de sinal com o estudo de sinal em cada coluna formada por uma função:



Como a inequação quer valores que sejam maiores que 0 escrevemos que o conjunto solução da inequação $(2x - 10)(x^2 - 5x + 6) > 0$, será: $S = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 3 \text{ ou } x > 5\}$

Na **inequação quociente**, tem-se uma desigualdade de funções fracionárias, ou ainda, de duas funções na qual uma está dividindo a outra. Diante disso, deveremos nos atentar ao domínio da função que se encontra no denominador, pois não existe divisão por zero. Com isso, a função que estiver no denominador da inequação deverá ser diferente de zero.

O método de resolução se assemelha muito à resolução de uma inequação produto, de modo que devemos analisar o sinal das funções e realizar a intersecção do sinal dessas funções.

Exemplo:

$$\frac{x + 5}{x - 2} \geq 0$$

Como o denominador deve ser diferente de zero, podemos afirmar que o valor de x não poderá ser igual a 2.

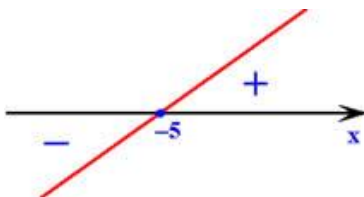
Como: $x - 2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$

Vamos estudar os sinais das funções.

Função $f(x) = x + 5$

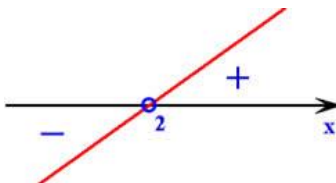
- Zero da função: $x = -5$
- Sinal do coeficiente a : $a = 1$, valor maior que zero, portanto é uma função crescente.

Sendo assim, analisando os sinais dessa função, temos:

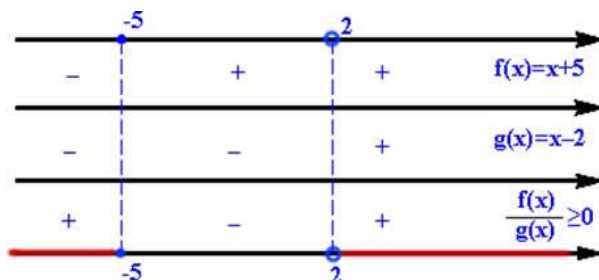


Função: $g(x)=x-2$

- Zero da função: $x=2$
- Sinal do coeficiente: $a=1$, valor maior que zero, portanto é uma função crescente.



Agora devemos realizar a intersecção dos intervalos das duas funções, lembrando que o ponto 2 é um valor aberto, pois não pertence ao domínio da desigualdade.



Veja que ao fazer a intersecção das funções deve ser feito também o jogo de sinal, assim como na equação produto. Sendo assim, podemos esboçar o conjunto solução:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5 \text{ ou } x > 2\}$$

4.4 Aplicações

Definir área

Vamos supor que um avicultor pretende fazer um pequeno viveiro, de formato retangular, para alojar alguns pintinhos. Para esta tarefa ele comprou 6 metros de cerca. Pretende-se que a área seja a máxima.

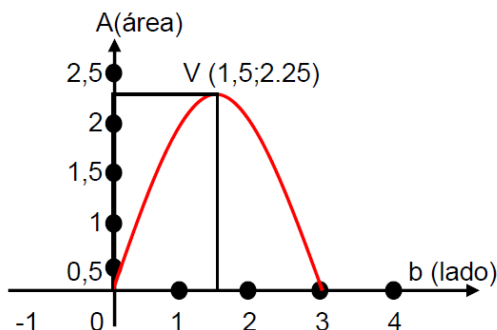
Queremos que o perímetro seja de 6 metros.

Então, fica $2a + 2b = 6$ - Se exprimirmos “a” em função de “b”, teremos: $2a = 6 - 2b$ / $a = 3 - b$.

A área da região retangular é dada pela formula: $A = a.b$, onde A é a área. Como $a = 3 - b$, fica assim $A = (3 - b). b \rightarrow A = 3b - b^2$

Pretende-se saber quando a área é máxima. Determinemos então o valor de “b”. Sabemos que $0 < b < 3$. Vimos já que $A = -b^2 + 3b$. Portanto utilizando a formula Báskara:

Desenhando o gráfico desta função obtemos:



O gráfico sugere que a área máxima no ponto em que a função toma o maior valor, ou seja:

$$\text{Vértice} \rightarrow [3/2, 9/4] = (1,5; 2,25)$$

Então, a área máxima é 2,25 para $b = 1,5$.

Neste caso, $a = 3 - b$ $a = 3 - 1,5 = 1,5$. A área máxima $a = b = 1,5$; isto quer dizer que é uma superfície quadrada.

Ponte Pênsil

Também chamada pendente, a ponte pênsil ou suspensa pode vencer distancias ainda maiores que as em arco ou viga, de até 2.100 m. Seu tabuleiro é sustentado por cabos de aço.

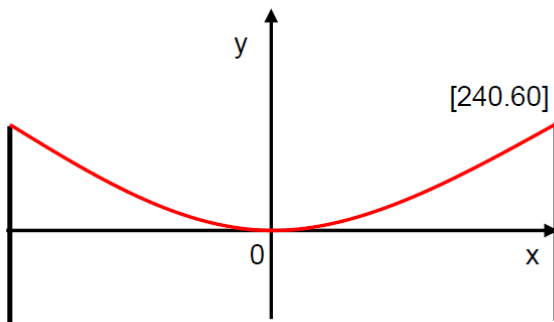
A ponte suspensa é apropriada para grandes vãos livres, pois ela permite máxima leveza e um peso morto mínimo.

Um exemplo é a Golden Gate Bridge, com um vão livre de 1.280 metros.

Vamos considerar que os cabos de suspensão de uma ponte (como na figura abaixo) estão presos a duas torres que distam 480 metros e tem 60 metros de altura. Os cabos tocam a ponte no centro.

Determine a equação da parábola que tem a forma dos cabos.

Observando a figura podemos ver que os cabos da ponte formam uma parábola cujo vértice foi escolhido para a origem no plano cartesiano. Nesse referencial o ponto de coordenadas (240, 60) pertence à parábola.



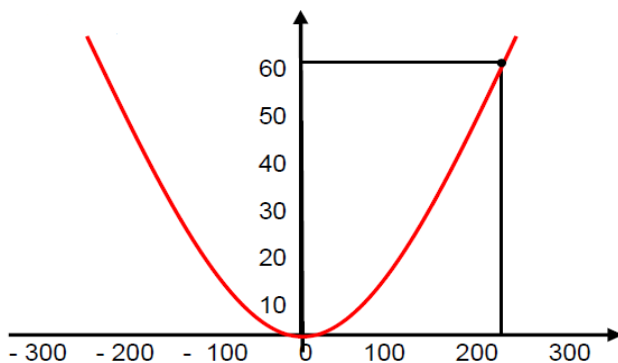
Como a parábola tem a vértice na origem sabe-se que é uma equação do tipo $y = ax^2$

Vamos descobrir o valor de “a” através das coordenadas dadas.

$$60 = a \cdot 240^2 \quad a = 1/960$$

Portanto a equação da parábola é $y = 1/960 \cdot x^2$

Veja o gráfico:



Definir Produto

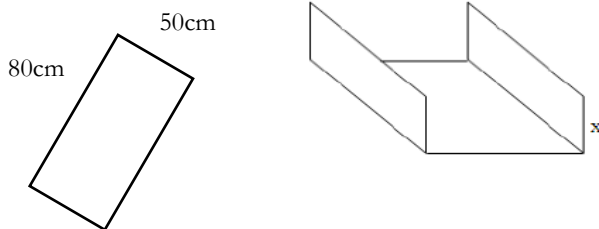
O plástico é derivado das resinas de petróleo. Pertencem ao grupo dos polímeros, com características especiais e variadas. São divididos em dois grupos de acordo com características de fusão: Termoplásticos e Termorrígidos.

A reciclagem é feita de 3 maneiras: Energética, Química e Mecânica.

A empresa Plastilit planeja produzir um tipo de arquivo para pastas, a partir de um pedaço retangular de plástico de 80 cm por 50 cm e, para isso, é preciso fazer duas dobras no plástico ao longo do maior lado, formando o arquivo na forma de U.

Que medida da altura “x” deverá ter esse arquivo, para que seu volume interno seja máximo?

A largura da pasta será $80 - 2x$, a altura vale “x” e a profundidade é 50 cm.



O volume interno da pasta é dado pelo produto das três dimensões:

$$V = 50 \times (80 - 2x) = 4000x - 100x^2$$

O volume é uma função quadrática em função da altura “x”.

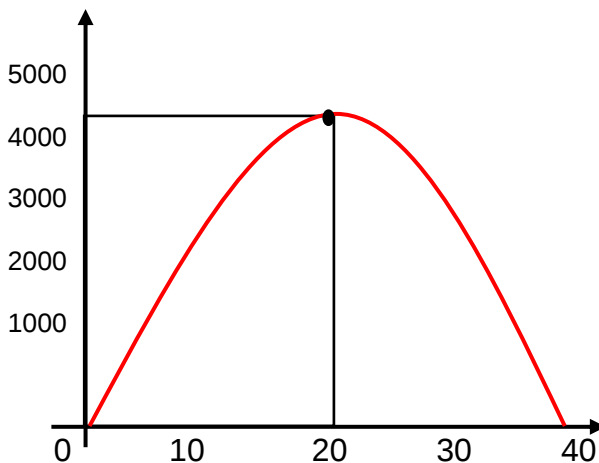
$$n(t) = -16t^2 + 480t = -16(t^2 - 30t) \rightarrow -16(t^2 - 30t + 15^2 - 15^2)$$

$$n(t) = -16(t^2 - 30t + 15^2) + 3600 \rightarrow -16(t - 15)^2 + 3600$$

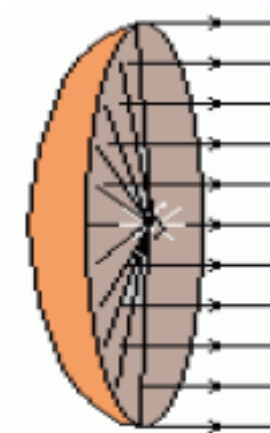
$$V(x) = -100x^2 + 4000x = -100(x^2 - 40x)$$

$$V(x) = -100(x^2 - 40x + 20^2 - 20^2) = 100(x^2 - 40x + 20^2) + 40000 \rightarrow -100(x - 20)^2 + 40000$$

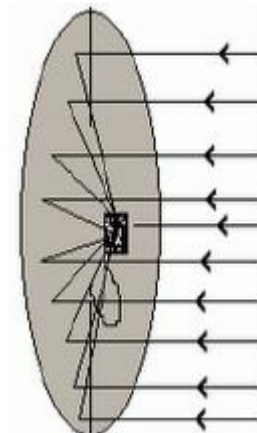
A pasta deverá ter 25 cm de altura na dobradura para um volume interno de 40.000 cm. Veja o gráfico da função:



Superfícies Parabólicas



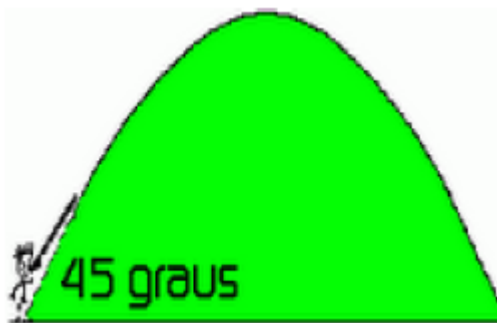
Faróis de carros



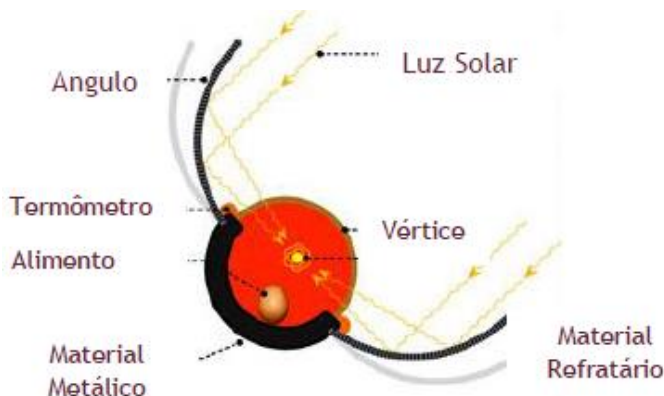
Antenas Parabólicas

Faróis de carros: Se colocarmos uma lâmpada no foco de um espelho com a superfície parabólica e esta lâmpada emitir um conjunto de raios luminosos que venham a refletir sobre o espelho parabólico do farol, os raios refletidos sairão todos paralelamente ao eixo que contém o "foco" e o vértice da superfície parabólica.

Antenas parabólicas: Se um satélite artificial colocado em uma órbita geoestacionária emite um conjunto de ondas eletromagnéticas, estas poderão ser captadas pela sua antena parabólica, uma vez que o feixe de raios atingirá a sua antena que tem formato parabólico e ocorrerá a reflexão desses raios exatamente para um único lugar, denominada o foco da parábola, onde estará um aparelho de receptor que converterá as ondas eletromagnéticas em um sinal que a sua TV poderá transformar em ondas que por sua vez significarão filmes, jornais e outros programas que você assiste normalmente.



Lançamentos de projéteis: Ao lançar um objeto no espaço (dardo, pedra, tiro de canhão) visando alcançar a maior distância possível tanto na horizontal como na vertical, a curva descrita pelo objeto é aproximadamente uma parábola, se considerarmos que a resistência do ar não existe ou é pequena. Sob estas circunstâncias o ângulo de maior alcance horizontal é de 45 graus.



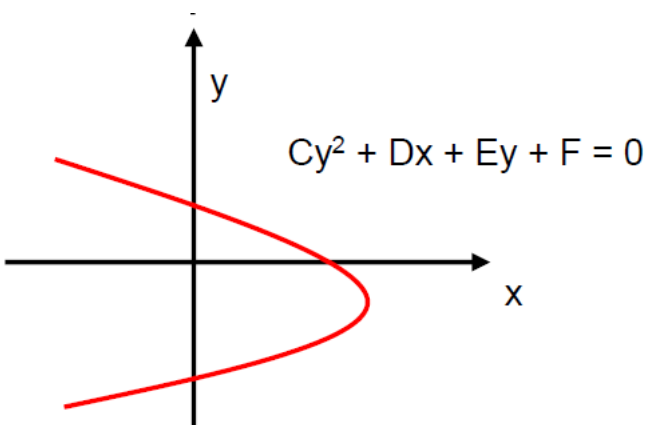
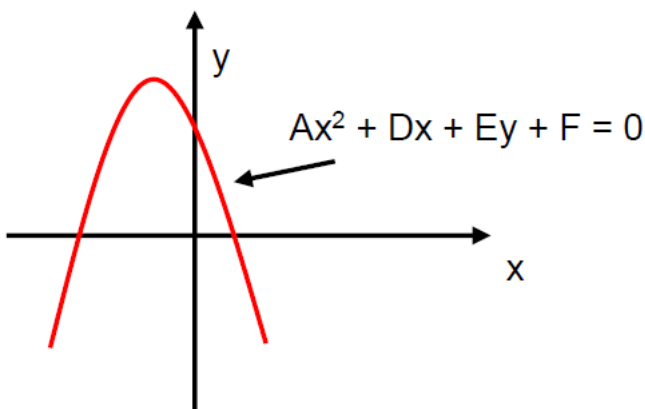
Fogões Solares: É possível utilizar a radiação solar para fins domésticos. Para isto deve-se concentrar essa radiação em pequenas regiões, utilizando-se de lentes ou espelhos. Os fogões solares usam material refratário parabólico para a concentração de calor. Os raios solares incidem na superfície do espelho e ao se refletirem passam pelo foco. O calor concentrado neste ponto é suficiente para cozinhar alimentos.

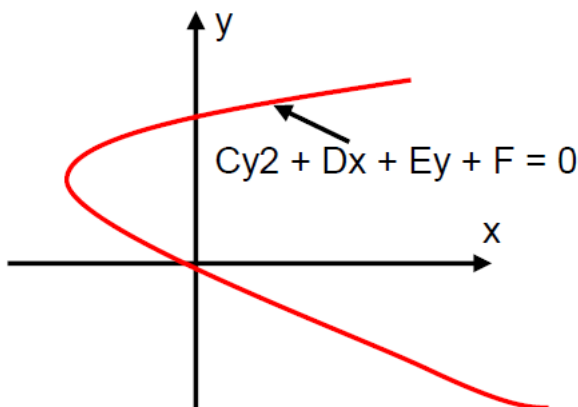
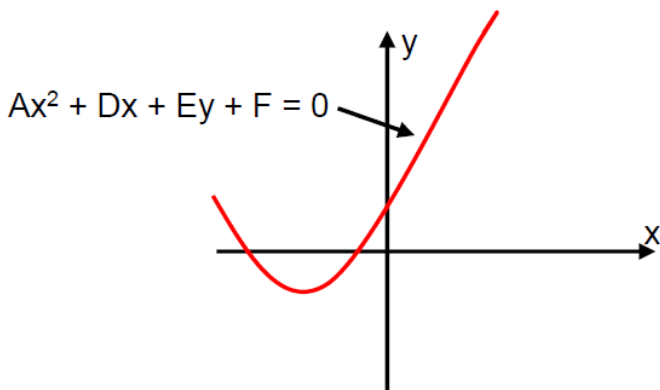
Curvas de Oferta e Demanda

Os segmentos pertencentes ao primeiro quadrante, de vários tipos de parábola são frequentemente apropriados para representar funções de oferta e demanda, como é ilustrado nos gráficos abaixo.

Observe que cada curva é apenas uma dentre uma família de curvas apropriadas para representar as funções discutidas.

Por exemplo, o vértice da parábola abaixo pode localizar-se em qualquer parte do segundo quadrante ou sobre o semieixo positivo de “y” contando que a parábola tenha interseções “x” e “y” positivas.





Equilíbrio de Mercado

O preço e a quantidade de equilíbrio de mercado são aqueles representados pelas coordenadas do ponto de interseção das curvas de oferta e demanda.

Uma solução aproximada para estas coordenadas pode ser obtida geometricamente para qualquer curva de oferta e demanda.

Entretanto, uma solução algébrica simultânea, mesmo para funções de oferta e demanda do segundo grau, pode envolver a resolução de equações do terceiro e quarto grau.

5. FUNÇÃO EXPONENCIAL

5.1 Potenciação e suas propriedades

Qualquer número natural elevado ao expoente 1 é igual ao próprio número.

Exemplo: $5^1 = 5$

Qualquer número natural não-nulo elevado ao expoente 0 é igual a 1.

Exemplo: $3^0 = 1$

Qualquer potência que possuem na base o número 1 é igual a 1.

Exemplo: $1^{100} = 1$

Qualquer potência que tem na base o número 10, o resultado é o número 1 seguido da quantidade de zeros de acordo com o valor do expoente.

Exemplo: $10^5 = 100000$

Veja que a quantidade de zeros foi definida pelo expoente 5.

Uma potência com expoente negativo indica que temos uma inversão entre o numerador com o denominador.

Exemplo: $5^{-3} = 1/5^3$

Veja que a potência foi para o denominador sem o sinal, e o denominador representado pelo número 1 (oculto) vai para o numerador.

Uma potência negativa no denominador se transforma em numerador se trocarmos o sinal da potência.

Exemplo: $1/5^{-2} = 5^2$ $3/2^{-3} = 3 \cdot 2^3$

Propriedades operatórias da potenciação

É importante conhecer as propriedades operatórias para auxiliar e simplificar os cálculos envolvendo potenciação.

Produto de potências de mesma base: conserva a base e soma os expoentes.

Exemplos: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Divisão de potências de mesma base: conserva a base e subtrai os expoentes.

Exemplos: $a^n : a^m = a^{n-m}$

Potência de potência: devemos multiplicar os expoentes.

Exemplos: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Potência de um produto: o expoente geral é expoente dos fatores.

Exemplos: $(a \cdot b)^n = (a^n \cdot b^n)$

Multipliação de potências com o mesmo expoente: conserva o expoente e multiplica as bases.

Exemplo: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

5.2 Equações exponenciais

As equações exponenciais são aquelas que apresentam a incógnita no expoente. Observe os exemplos:

$$2^x = 256 \rightarrow 3^{x+1} = 9 \rightarrow 4^x = 1024 \rightarrow 2^{x+2} = 512$$

As equações exponenciais possuem um método de resolução diferenciado, precisamos igualar as bases para aplicarmos a propriedade de igualdade entre os expoentes.

Observe a resolução da seguinte equação:

$$5^x = 625 \text{ (fatorando 625 temos: } 5^4)$$

$$5^x = 5^4 \rightarrow x = 4$$

A solução da equação exponencial será $x = 4$.

Observação: fatorar significa decompor o número em fatores primos, isto é, escrever o número através de uma multiplicação de fatores iguais utilizando as regras de potenciação.

Acompanhe outro exemplo:

Vamos determinar a solução da equação: $2^{x+8} = 512$.

Devemos escrever 512 na forma fatorada, $512 = 2^9$.

$$\text{Então: } 2^{x+8} = 2^9 \rightarrow x + 8 = 9 \rightarrow x = 1$$

A solução da equação exponencial $2^{x+8} = 512$ é $x = 1$.

Resolva a equação: $2^x = \sqrt[5]{128}$

Transforme a raiz quinta em potência: $2^x = 128^{1/5}$

Pela fatoração do número 128 temos 2^7 , então:

$$2^x = (2^7)^{1/5} \rightarrow x = 7 \cdot 1/5 \rightarrow x = 7/5$$

Portanto, a solução da equação exponencial é $x = 7/5$.

Encontre o valor de x que satisfaça a equação exponencial: $2^{x^2 - 7x + 12} = 1$.

Para igualar as bases, vamos lembrar a regra da potenciação que diz o seguinte: “todo número diferente de zero elevado a zero é igual a 1.”

Com base na regra, podemos dizer que $1 = 2^0$, então: $2^{x^2 - 7x + 12} = 2^0$

$x^2 - 7x + 12 = 0$, temos uma equação completa do 2º grau que deverá ser resolvida pelo teorema de Bháskara. Aplicando o método resolutivo descobrimos os seguintes valores:

$$x' = 3 \text{ e } x'' = 4.$$

Portanto, os valores que satisfazem a equação exponencial $2^{x^2 - 7x + 12} = 1$ é $x = 3$ e $x = 4$.

Função exponencial: definição e representação gráfica

A função exponencial é aquela em que a variável é um expoente. Matematicamente, ela é definida como f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tal que $f(x) = a^x$, em que $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

O gráfico dessa função é uma curva obtida ao encontrar alguns pares ordenados que pertencem à função e ao desenhar essa curva que passa por eles.

A observação de alguns gráficos dessas funções permite deduzir algumas de suas propriedades, que serão discutidas neste texto.

Construção do gráfico da função exponencial

Em uma função qualquer, encontrar pares ordenados que pertençam ao seu gráfico é tarefa simples: basta escolher valores para x e encontrar os valores de $f(x)$ ligados a eles no contradomínio. Isso é feito substituindo o valor de x escolhido na função e calculando a expressão numérica resultante.

Exemplo: para encontrar 5 pares ordenados pertencentes ao gráfico da função $f(x) = 2^x$, usaremos os valores $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$ e preencheremos a seguinte tabela:

x	$f(x) = 2^x$	y
-3	$f(-3) = 2^{-3} \rightarrow f(-3) = 1/2^3 \rightarrow f(-3) = 1/8$	1/8
-2	$f(-2) = 2^{-2} \rightarrow f(-2) = 1/2^2 \rightarrow f(-2) = 1/4$	1/4
-1	$f(-1) = 2^{-1} \rightarrow f(-1) = 1/2^1 \rightarrow f(-1) = 1/2$	1/2
0	$f(0) = 2^0 \rightarrow f(0) = 1$	1
1	$f(1) = 2^1 \rightarrow f(1) = 2$	2
2	$f(2) = 2^2 \rightarrow f(2) = 4$	4
3	$f(3) = 2^3 \rightarrow f(3) = 8$	8

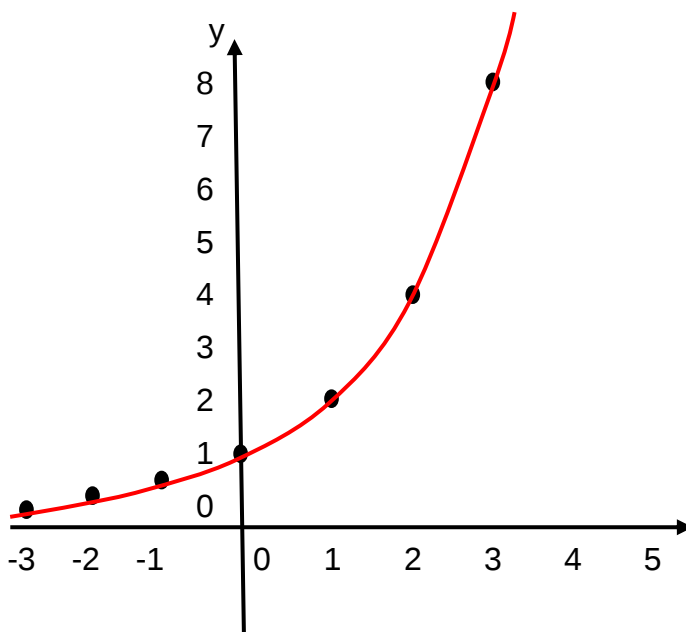
Com a tabela preenchida, perceba que cada valor de x se relaciona a um valor de $f(x)$ que pode ser compreendido como y no par ordenado. Sendo assim, os pares ordenados formados são:

A = (-3, 1/8), B = (-2, 1/4), C = (-1, 1/2),

D = (0, 1), E = (1, 2), F = (2, 4) e G = (3, 8).

Para desenhar o gráfico, marque os pontos acima do plano cartesiano e desenhe uma curva que os contenha.

Atenção: os pontos não devem ser ligados com linhas retas, devem estar sobre uma curva.



Propriedades

- Se $a > 1$, então a função exponencial é crescente. Para perceber isso, observe a função $f(x) = 2x$;
- Se $0 < a < 1$, então a função exponencial é decrescente. Para perceber isso, observe a função $f(x) = 0,25x$;
- Para todo a pertencente aos números reais e para todo x também pertencente a esse conjunto, a função será positiva. Note pelos gráficos que, independentemente dos valores de x e de a , não existem pontos abaixo do eixo x ;
- Toda função exponencial possui o ponto de coordenadas $(0,1)$.

5.3 Aplicações da função exponencial

A principal característica de uma função exponencial é o aparecimento da variável no expoente.

Esse tipo de função expressa situações onde ocorre grandes variações em períodos curtos.

As exponenciais, como são conhecidas, possuem diversas aplicações no cotidiano, na biologia, química, Matemática financeira onde está presente nos cálculos relacionados aos juros compostos, pois ocorre acumulação de capital durante o período da aplicação.

A função exponencial expressa um crescimento ou um decrescimento característico de alguns fenômenos da natureza.

Exemplo:

Num depósito a prazo efetuado em um banco, o capital acumulado ao fim de certo tempo é dado pela fórmula $C = D \cdot (1 + i)^t$, onde C representa o capital acumulado, D o valor do depósito, i a taxa de juros ao mês e t o tempo de meses em que o dinheiro está aplicado. Nesse sistema, ao final de cada mês os juros capitalizados são incorporados ao depósito.

Para um depósito de R\$ 1 000,00, com taxa de 2% ao mês, qual o capital acumulado ao fim de 6 meses?

$$C = D \cdot (1 + i)^t$$

$$C = 1000 \cdot (1 + 0,02)^6$$

$$C = 1000 \cdot 1,02^6$$

$$C = 1000 \cdot 1,126162419264$$

$$C = 1.126,16$$

O capital acumulado será de R\$ 1.126,16.

O número de bactérias em um meio duplica de hora em hora. Se, inicialmente, existem 8 bactérias no meio, ao fim de 10 horas o número de bactérias será?

No tempo $t = 0$, o número de bactérias é igual a 8.

No tempo $t = 1$, o número de bactérias é dado por $8 \cdot 2 = 16$.

No tempo $t = 2$, o número de bactérias é dado por $8 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

Assim, no tempo $t = x$, o número de bactérias é dado por: **$n = 8 \cdot 2^x$**

Logo, no tempo desejado, ou seja, ao fim de 10 horas, o número de bactérias será de:

$$N = 8 \cdot 2^x \rightarrow n = 8 \cdot 2^{10} \rightarrow n = 2^3 \cdot 2^{10} \rightarrow n = 2^{13}$$

Ou seja, ao final de 10 horas o número de bactérias será de 8.192.

6. FUNÇÃO LOGARÍTMICA

6.1 Definição de logaritmos

Os logaritmos, criados por John Napier e Jobst Burgi, e posteriormente adaptados por Henry Briggs, possuem a seguinte lei de formação:

$$\log_a b = x$$

Em que, a = base do logaritmo, b = logaritmando e x = logaritmo.

O logaritmo de um número **b**, em uma base **a**, é o expoente **x** que se deve aplicar à base **a** para obter o número **b**. Dessa forma:

$$\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$$

Exemplo:

$$\log_3 9 \leftrightarrow 3^2 = 9$$

$$\log_{10} 100 \leftrightarrow 10^2 = 100$$

$$\log_2 16 \leftrightarrow 2^4 = 16$$

$$\log_9 81 \leftrightarrow 9^2 = 81$$

6.2 Propriedades dos logaritmos

A partir dessa definição, podemos apresentar algumas definições que auxiliarão no desenvolvimento de algumas situações envolvendo logaritmo. Veja:

O logaritmo do número 1, em qualquer base sempre, será igual a 0.

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1$$

O logaritmo de qualquer número a , na própria base a , será igual a 1.

$$\log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a$$

O logaritmo de uma potência da base é o expoente, em qualquer base.

$$\log_a a^m = m, \text{ pois } m \cdot \log_a a = m \cdot 1 = m$$

A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b .

$$a^{\log_a b} = b, \text{ pois } \log_a b = x \rightarrow a^x = b$$

Dois logaritmos são iguais quando seus logaritmandos forem iguais.

$$\log_a b = \log_a c \leftrightarrow b = c$$

Exemplo:

Aplicar a definição de logaritmo para calcular o valor de x em cada caso:

a) $\log_3 27 = x \rightarrow 3^x = 27 \rightarrow 3^x = 3^3 \rightarrow x = 3$

b) $\log_{81} x = 3/4 \rightarrow x = 81^{3/4} \rightarrow x = (3^4)^{3/4} \rightarrow x = 3^{12/4} \rightarrow x = 3^3 \rightarrow x = 27$

c) $\log_4 \sqrt{2} = x \rightarrow 4^x = \sqrt{2} \rightarrow 2^{2x} = \sqrt{2} \rightarrow 2^{2x} = 2^{1/2} \rightarrow 2x = 1/2 \rightarrow x = 1/4$

d) $\log_x 8 = 2 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{8} \rightarrow x = 2\sqrt{2}$

e) $\log_4 (2x - 1) = 1/2 \rightarrow 2x - 1 = 4^{1/2} \rightarrow 2x - 1 = \sqrt{4} \rightarrow 2x - 1 = 2 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = 3/2$

f) $\log_{18} 18 = x \rightarrow 18^x = 18 \rightarrow x = 1$

g) $\log_x 1024 = 2 \rightarrow x^2 = 1024 \rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{1024} \rightarrow x = 32$

h) $\log_4 0,25 = x \rightarrow 4^x = 0,25 \rightarrow 4^x = 25/100 \rightarrow 4^x = 1/4 \rightarrow 4^x = 4^{-1} \rightarrow x = -1$

6.3 Equações Logarítmicas

Toda equação deve possuir uma igualdade e uma variável qualquer. Aquelas em que a variável se encontra no logaritmando ou na base serão chamadas de equações logarítmicas.

Observe alguns exemplos:

$$\log_2(x + 1) = 10$$

$$\log_5(x + 100) = 3$$

$$\log_3 x = 2$$

Vamos considerar duas situações gerais:

$$\log_b x = \log_b y, \text{ onde } x = y$$

$$\log_b x = a, \text{ onde } x = b^a$$

Exemplos:

- 1) $\log_4(x+3) = 1 \rightarrow x + 3 = 4^1 \rightarrow x = 4 - 3 \rightarrow x = 1$
- 2) $\log_{1/5}(\log_{1/2}x) = -1 \rightarrow \log_{1/2}x = (1/5)^{-1} \rightarrow \log_{1/2}x = 5 \rightarrow x = (1/2)^5 \rightarrow x = 1/32$
- 3) $\log_4(x-3) = \log_4(-x+7) \rightarrow x-3 = -x+7 \rightarrow x+x = 7+3 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = 10/2 \rightarrow x = 5$
- 4) $\log_{0,2}(3x-2) = -1 \rightarrow 3x-2 = 0,2^{-1} \rightarrow 3x-2 = (2/10)^{-1} \rightarrow 3x-2 = (10/2)^1 \rightarrow 3x-2 = 5^1 \rightarrow 3x = 5+2 \rightarrow 3x = 7 \rightarrow x = 7/3$

6.4 Definição de função logarítmica

As funções na forma $f(x) = \log_a x$ são consideradas logarítmicas, com $a > 0$ e $a \neq 1$, sendo $f: \mathbb{R}^*_{+} \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplos:

$$f(x) = \log_2 x$$

$$f(x) = \log_5(x-2)$$

$$f(x) = \log_{(a-2)} 4$$

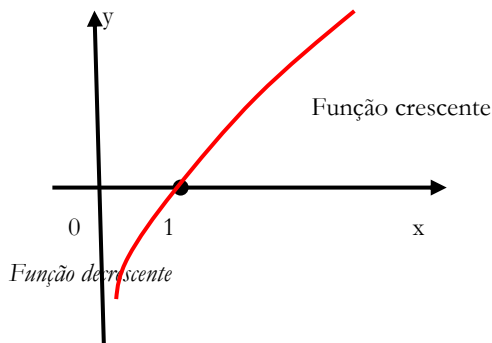
$$f(x) = \log_{0,5} x$$

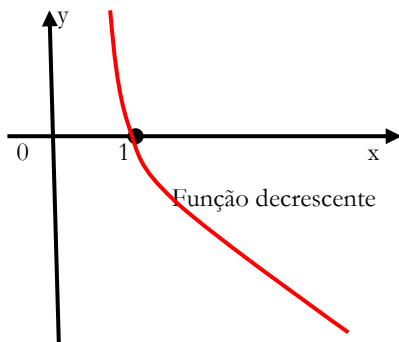
6.5 O gráfico

O gráfico da função logarítmica é determinado de acordo com as seguintes condições:

Crescente: base > 1 .

Decrescente: base > 0 e < 1 .





As funções logarítmicas envolvem em sua resolução, propriedades destinadas ao estudo dos logaritmos. Portanto, o seu desenvolvimento depende do conhecimento prévio dessas propriedades.

6.6 Aplicações

As funções logarítmicas possuem várias aplicações na Matemática e em diversas áreas do conhecimento, como Física, Biologia, Química, Medicina, Geografia, entre outras.

Na Matemática Financeira

Exemplo:

Uma pessoa aplicou a importância de R\$ 500,00 em uma instituição bancária, que paga juros mensais de 3,5%, no regime de juros compostos. Quanto tempo após a aplicação o montante será de R\$ 3 500,00?

Resolução:

Nos casos envolvendo a determinação do tempo e juros compostos, a utilização das técnicas de logaritmos é imprescindível.

Fórmula para o cálculo dos juros compostos: $M = C \cdot (1 + i)^t$. De acordo com a situação-problema, temos:

$$M \text{ (montante)} = 3500$$

$$C \text{ (capital)} = 500$$

$$i \text{ (taxa)} = 3,5\% = 0,035$$

$$t = ?$$

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

$$3500 = 500 \cdot (1 + 0,035)^t$$

$$3500/500 = 1,035^t$$

$$1,035^t = 7$$

Aplicando o logaritmo:

$$\log 1,035^t = \log 7$$

$$t \cdot \log 1,035 = \log 7$$

$$t \cdot 0,0149 = 0,8451$$

$$t = 0,8451 / 0,0149$$

$$t = 56,7$$

O montante de R\$ 3.500,00 será originado após 56 meses de aplicação.

Na Geografia

Em uma determinada cidade, a taxa de crescimento populacional é de 3% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população dessa cidade dobrará, se a taxa de crescimento continuar a mesma?

$$\text{População do ano-base} = P_0$$

$$\text{População após um ano} = P_0 \cdot (1,03) = P_1$$

$$\text{População após dois anos} = P_0 \cdot (1,03)^2 = P_2$$

$$\text{População após } x \text{ anos} = P_0 \cdot (1,03)^x = P_x$$

Vamos supor que a população dobrará em relação ao ano-base após x anos, sendo assim, temos:

$$P_x = 2 \cdot P_0$$

$$P_0 \cdot (1,03)^x = 2 \cdot P_0$$

$$1,03^x = 2$$

Aplicando logaritmo:

$$\log 1,03^x = \log 2$$

$$x \cdot \log 1,03 = \log 2$$

$$x \cdot 0,0128 = 0,3010$$

$$x = 0,3010 / 0,0128$$

$$x = 23,5$$

A população dobrará em aproximadamente 23,5 anos.

Na Química

Determine o tempo que leva para que 1000 g de certa substância radioativa, que se desintegra a taxa de 2% ao ano, reduza-se a 200 g. Utilize a seguinte expressão: $Q = Q_0 \cdot e^{-rt}$, em que Q é a massa da substância, r é a taxa e t é o tempo em anos.

$$Q = Q_0 \cdot e^{-rt}$$

$$200 = 1000 \cdot e^{-0,02t}$$

$$200/1000 = e^{-0,02t}$$

$$1/5 = e^{-0,02t}$$

$$-0,02t = \log_e 1/5$$

$$-0,02t = \log_e 5^{-1}$$

$$-0,02t = -\log_e 5$$

$$-0,02t = -\ln 5 \quad (-1)$$

$$0,02t = \ln 5$$

$$t = \ln 5 / 0,02 \rightarrow t = 1,6094 / 0,02 \rightarrow t = 80,47$$

A substância levará 80,47 anos para reduzir-se a 200 g.

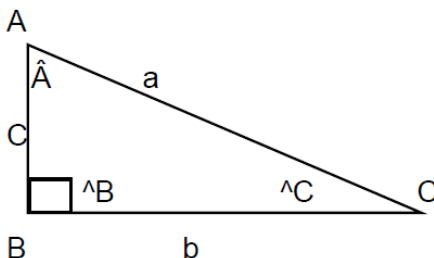
7. FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA

O surgimento da trigonometria está ligado à necessidade do homem relacionar ângulos a distâncias pouco acessíveis.

A ferramenta auxiliar utilizada para o desenvolvimento da trigonometria é o triângulo, onde relações particulares entre os ângulos e a medida de seus lados foram estabelecidas.

Esse estudo recebeu o nome de razões trigonométricas denominadas seno, cosseno e tangente.

Essas razões são aplicadas ao triângulo retângulo, aquele que possui um ângulo retângulo medindo 90° . Observe exemplo:



Nesse triângulo, os lados recebem nomes especiais, que são utilizados na formação das razões trigonométricas. Na ilustração vamos nomear os lados utilizando o ângulo B de 90° . Os lados representados por a e c são denominados catetos e o lado oposto ao ângulo reto é denominado hipotenusa. Dizemos que a hipotenusa é o lado de maior comprimento do triângulo retângulo.

Nomeando os lados com referência ao ângulo C, temos que o cateto c será oposto e o cateto a será adjacente. Fazendo referência ao ângulo A, temos que o cateto oposto será a e o cateto adjacente será c.

Dessa forma, o cálculo do seno e cosseno seria a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente com a hipotenusa, e a tangente seria a razão entre o seno e o cosseno. Levando em consideração o ângulo $\hat{A}$, podemos dizer que:

$$\text{sen}A = a/b$$

$$\text{cos}A = c/b$$

$$\text{tg}A = a/c$$

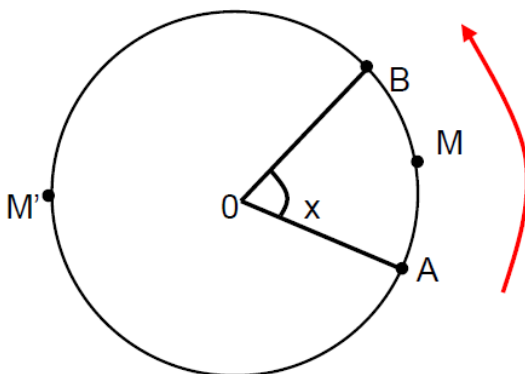
$$\text{sen}C = c/b$$

$$\text{cos}C = a/b$$

$$\text{tg}C = c/a$$

7.1 Arcos e Ângulos

Seja uma circunferência de centro O sobre a qual tomamos dois pontos distintos, A e B . A seguir, ainda sobre a circunferência, tomemos um terceiro ponto M , distinto dos anteriores. A circunferência fica dividida em duas partes, cada uma das quais é um arco de circunferência:



- Arco de circunferência AMB , e
- Arco de circunferência $AM'B$.

A e B são as extremidades do arco.

É importante lembrar que:

A cada arco tomado corresponde um ângulo central e a medida de um arco equivale à medida do ângulo central correspondente.

Assim, por exemplo, se, na figura, x é a medida do ângulo central $A\hat{O}B$ então $m(AMB) = x$. Analogamente se y é a medida do outro ângulo central então $m(AM'B) = y$.

Se não houver dúvida quando ao arco a que nos referimos, podemos escrever apenas AB ao invés de AMB .

Atenção: não confunda medida de arco com comprimento de arco. Estes são conceitos bem diferentes.

Se por exemplo você puder “cortar” a circunferência mostrada na figura acima nos pontos A e B e em seguida “alinhar” cada um dos dois arcos segundo um segmento de reta e medir o comprimento desses segmentos (com uma régua, por exemplo) você obterá como resultados os comprimentos dos dois arcos.

Medir um arco (ou ângulo) é compará-lo com outro, unitário.

7.2 Medidas de arcos e ângulos

Um grau é definido como a medida do ângulo central subtendido por um arco igual a $1/360$ da circunferência que contém o arco.

Então podemos dizer que uma circunferência (ou arco de uma volta) mede 360° .

O radiano (notação: rad) é definido como a medida de um ângulo central subtendido por um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco.

A circunferência toda contém 2π raios, o que significa que seu comprimento é igual a $2\pi r$ e que a medida dela (correspondente ao arco de uma volta) é de 2π rad.

Sabendo-se que a circunferência (ou arco de uma volta) mede 360° ou 2π rad, podemos estabelecer entre as unidades as relações:

$$360^\circ \leftrightarrow 2\pi \text{ rad}$$

$$180^\circ \leftrightarrow \pi \text{ rad}$$

O percurso sobre um arco desde sua origem até sua extremidade poderá ser feito em dois sentidos: horário ou anti-horário.

7.3 Círculo trigonométrico

O círculo trigonométrico é uma circunferência de raio 1 usada para representar números reais relacionados a ângulos. Sendo assim, cada ponto dessa circunferência está relacionado a um número real, que, por sua vez, representa um ângulo. Assim, é possível representar também valores de seno e cosseno.

O centro desse círculo está sobre o ponto $O = (0,0)$ do plano cartesiano e, como o raio dele é 1, podemos calcular seu comprimento da seguinte maneira:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r \rightarrow C = 2 \cdot \pi \cdot 1 \rightarrow C = 2 \cdot \pi$$

A ideia de volta

A ideia de volta está presente nos círculos trigonométricos. Como o comprimento da circunferência é $2 \cdot \pi$, podemos dizer que uma volta completa nesses círculos tem essa medida.

Repare apenas que o ângulo formado por essa volta mede 360° . Dessa maneira, o número $2 \cdot \pi$ relaciona-se com o ângulo 360° .

Assumindo que essas voltas sejam feitas no sentido anti-horário, vamos calcular o valor numérico e o ângulo correspondente à meia-volta:

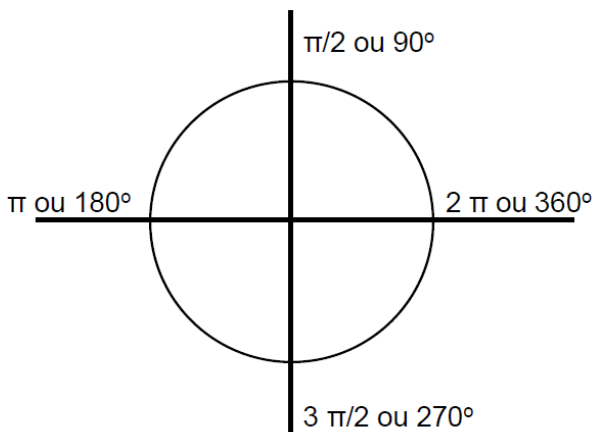
$$C/2 = 2 \cdot \pi / 2 = \pi$$

Portanto, meia-volta é igual a π . O ângulo gerado por meia-volta é 180° , pois é metade de 360° .

Qualquer número real pode ser representado em um círculo trigonométrico.

O comum, entretanto, é usar os números que vão de 0 a $2 \cdot \pi$ e os ângulos referentes a esse intervalo.

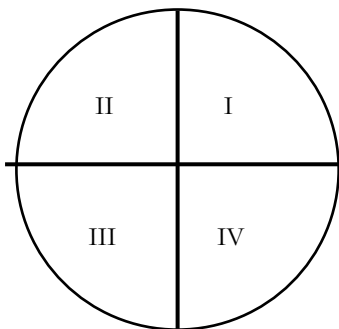
A figura a seguir mostra a localização dos pontos correspondentes aos ângulos 0° , 90° , 180° , 270° e 360° e os números reais, em função de π , relacionados.



Quadrantes

Os ângulos presentes na figura acima, marcam posições muito importantes no círculo trigonométrico: os chamados quadrantes.

Eles são definidos no sentido anti-horário. Na figura a seguir, observe os quatro quadrantes e sua localização no círculo trigonométrico.



Em cada um desses quadrantes pode ser encontrado um intervalo de números reais em função de π em que cada valor está relacionado a um ângulo. Veja:

Quadrante I: contém os números reais que vão de 0 até $\pi/2$ e os ângulos entre 0° e 90° .

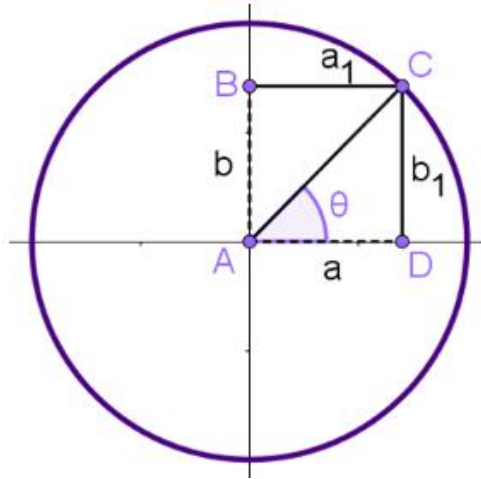
Quadrante II: contém os números reais que vão de $\pi/2$ até π e os ângulos entre 90° e 180° .

Quadrante III: contém os números reais que vão de π até $3\pi/2$ e os ângulos entre 180° e 270° .

Quadrante VI: contém os números reais que vão de $3\pi/2$ até 2π e os ângulos entre 270° e 360° .

7.4 Razão seno e razão cosseno

No círculo trigonométrico, é possível encontrar os valores de seno e de cosseno de um ângulo θ qualquer. Para tanto, é necessário construir esse ângulo no círculo trigonométrico, como foi feito na imagem a seguir.



Note que, tomando os segmentos BC e AB, paralelos a AD e DC, respectivamente, temos um retângulo. Podemos notar que a medida do lado $CD = b_1$ é igual ao $\text{sen}\theta$, pois:

$$\text{Sen}\theta = \text{CD}/\text{AC} = b_1/1 = b_1$$

A medida do segmento AC é 1 porque AC é o raio da circunferência. Essa medida é a altura do retângulo.

A medida do segmento $AD = a$ é igual ao $\cos\theta$, pois:

$$\cos\theta = \text{AD}/\text{AC} = a/1 = a$$

Sendo assim, no círculo trigonométrico, as medidas de seno e cosseno de θ são iguais às medidas do cateto oposto e adjacente a esse ângulo.

Podemos calcular agora os valores mais importantes para seno e cosseno. Observe no círculo trigonométrico que:

Quando $\theta = 0^\circ$, $\text{sen}\theta = 0$ e $\text{cos}\theta = 1$.

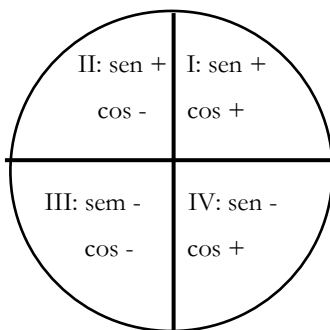
Quando $\theta = 90^\circ$, $\text{sen}\theta = 1$ e $\text{cos}\theta = 0$.

Quando $\theta = 180^\circ$, $\text{sen}\theta = 0$ e $\text{cos}\theta = -1$.

Quando $\theta = 270^\circ$, $\text{sen}\theta = -1$ e $\text{cos}\theta = 0$.

Quando $\theta = 360^\circ$, $\text{sen}\theta$ e $\text{cos}\theta$ possuem os mesmos valores do caso em que θ é igual a 0° .

Nesse sentido, podemos saber os quadrantes nos quais o seno e o cosseno são positivos ou negativos. Observe a figura a seguir:



7.5 Identidades Trigonométricas

No estudo das funções trigonométricas pertencentes a um mesmo arco, utilizamos as seguintes relações trigonométricas fundamentais:

$$\text{sen}^2x + \text{cos}^2x = 1$$

$$\text{tg}x = \text{sen}x/\text{cos}x$$

$$\text{cotg}x = \text{cos}x/\text{sen}x$$

$$\text{sec}x = 1/\text{cos}x$$

$$\text{cosec}x = 1/\text{sen}x$$

As relações trigonométricas fundamentais originam outras expressões, que são importantes e aplicáveis nos casos envolvendo funções de um mesmo arco. Veja as relações decorrentes das fundamentais:

$$\text{sec}2x = \text{tg}2x + 1$$

$$\text{cossec}2x = \text{cotg}2x + 1$$

$$\text{cotg}x = 1/\text{tg}x$$

Toda igualdade verificável envolvendo funções trigonométricas é denominada identidade trigonométrica.

Exemplo:

$$\operatorname{tg} x \cdot \cos x = \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen} x / \cancel{\cos x} \cdot \cancel{\cos x} = \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

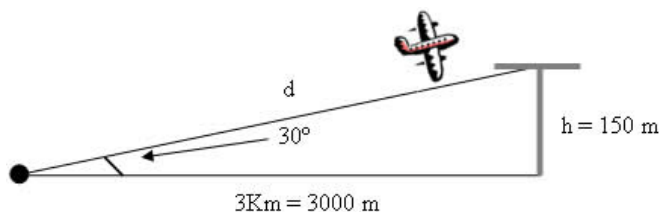
Aplicações

A trigonometria possui inúmeras aplicações nos diversos ramos da ciência, sendo considerada uma importante aliada do mundo moderno.

Observe os exemplos a seguir:

Ao decolar, um avião sobe formando um ângulo de 30° com a pista (horizontal). Na direção do percurso existe uma torre de transmissão de energia elétrica situada a 3km do aeroporto e com altura igual a 150 metros. Verifique se, mantendo o trajeto, o avião pode colidir com a torre.

Esquema da situação:

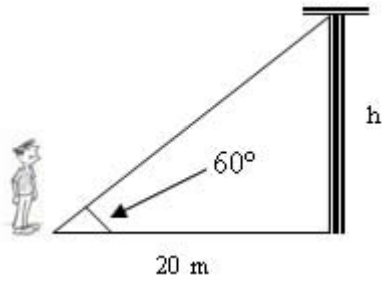


Usaremos a relação da tangente:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} &= \text{CO} / \text{CA} && \rightarrow \operatorname{tg} 30^\circ = x / 3000 \\ \rightarrow \sqrt{3} / 3 &= x / 3000 && \rightarrow 3x = 3000 \cdot \sqrt{3} \\ \rightarrow x &= 3000 \cdot \sqrt{3} / 3 && \rightarrow x = 1700 \end{aligned}$$

O avião não irá colidir com a torre, pois essa possui 150 metros enquanto o avião estará a uma altura de 1700 metros.

Do ponto A, uma pessoa observa o topo de uma torre sob um ângulo de 60° . Determine a altura da torre, sabendo que a pessoa está a 20 metros dela.



$$\operatorname{tg} 60^{\circ} = h / 20 \rightarrow \sqrt{3} = h / 20 \rightarrow h = 20 \sqrt{3} \rightarrow h = 34$$

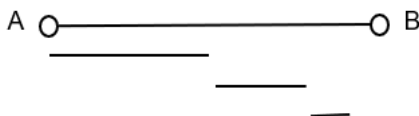
8. FUNÇÃO LIMITE

8.1 Conceito histórico

O conceito de limite constitui um dos fundamentos do Cálculo, uma vez que para definir derivada, continuidade, integral, convergência, divergência, utilizamos esse conceito. A sistematização lógica do Cálculo pressupõe então o conceito de limite.

Entretanto, o registro histórico é justamente o oposto. Por muitos séculos, a noção de limite foi confundida com ideias vagas, às vezes filosóficas relativas ao infinito - números infinitamente grandes ou infinitamente pequenos - e com intuições geométricas subjetivas, nem sempre rigorosas. O termo limite no sentido moderno é produto dos séculos XVIII e XIX, originário da Europa. A definição moderna tem menos de 150 anos.

A primeira vez em que a ideia de limite apareceu, foi por volta de 450 a.C., na discussão dos quatro paradoxos de Zeno. Por exemplo, no primeiro paradoxo - a Dicotomia - Zeno discute o movimento de um objeto que se move entre dois pontos fixos, A e B, situados a uma distância finita, considerando uma seqüência infinita de intervalos de tempo - $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ - cada um deles sendo o tempo gasto para percorrer a metade da distância percorrida no movimento anterior.



Analisando o problema, Zeno concluiu que dessa maneira o móvel nunca chegaria em B. Aristóteles, 384 - 322 a.C., refletiu sobre os paradoxos de Zeno com argumentos filosóficos. Para provas rigorosas das fórmulas de determinadas áreas e volumes, Arquimedes encontrou diversas somas que contêm um número infinito de termos. Na ausência do conceito de limite, Arquimedes utilizava argumentos denominados dupla *reductio ad absurdum*.

O Cálculo, às vezes, foi também descrito como o estudo das curvas, das superfícies, e dos sólidos. O desenvolvimento da geometria desses

objetos floresceu seguindo a invenção da geometria analítica com Pierre de Fermat e René Descartes.

Fermat planejou um método algébrico para encontrar os pontos de máximo ou de mínimo em determinadas curvas. Ele estava tentando mostrar exatamente que nos pontos de máximo ou de mínimo a reta tangente à curva é horizontal, isto é, tem inclinação zero.

Encontrar a reta tangente a uma curva é um problema fundamental do Cálculo. Durante o século XVII, diversos geômetras planejaram esquemas algébricos complicados para encontrar retas tangentes a determinadas curvas.

Descartes desenvolveu um processo que usava dobro-raízes de uma equação auxiliar; essa técnica foi melhorada pelo matemático Johan Hudde, 1628 - 1704, que era, na época, o maior matemático de Amsterdã.

René de Sluse, 1622 - 1685, inventou um outro método mais sofisticado para obter retas tangentes a curvas. Em cada um desses métodos, o limite deve ter sido usado numa etapa crítica. Mas nenhum deles percebeu a necessidade da ideia de limite, e assim cada um encontrou uma maneira inteligente para conseguir os próprios resultados, que estavam corretos, embora sem o rigor possibilitado pelo limite.

Determinar valores exatos para áreas em regiões limitadas por curvas é outro problema fundamental do Cálculo. Este é chamado frequentemente problema da quadratura - determinação de uma área - e, relacionado com ele, o problema da cubatura, isto é, da determinação do volume de um sólido limitado por superfícies. Todos esses problemas conduzem às integrais.

Johannes Kepler, astrônomo famoso, era um dos mais envolvidos com problemas de cubatura.

Bonaventura Cavalieri desenvolveu uma teoria elaborada nas quadraturas. Outros, tais como Evangelista Torricelli, Pierre de Fermat, John Wallis e St. Vincent de Gregory, planejaram técnicas de quadratura e/ou de cubatura que se aplicavam a regiões ou a sólidos específicos. Mas nenhum deles usou limites.

Os resultados estavam quase todos corretos, mas cada um dependia de uma argumentação não algébrica, recorrendo à intuição geométrica ou filosófica, questionável em algum ponto crítico. A necessidade para os limites era justa, mas não reconhecida.

Isaac Newton, em *Principia Mathematica*, seu maior trabalho em Matemática e Ciência, foi o primeiro a reconhecer, em certo sentido, a necessidade do limite.

No começo do livro I do Principia, tentou dar uma formulação precisa para o conceito do limite. Ele havia descoberto o papel preliminar que o limite teria no Cálculo, sendo essa a semente da definição moderna. Infelizmente, para a fundamentação rigorosa do Cálculo, durante muitas décadas, ninguém examinou as sugestões que Newton havia fornecido.

Com as ferramentas disponíveis na época, os problemas da chamada Geometria foram resolvidos, e surgiam novas aplicações do Cálculo à Ciência, principalmente à Física e à Astronomia. Novos campos da Matemática, em especial das equações diferenciais e do cálculo de variações, foram sendo criados.

Durante o século XVIII, uma atenção muito pequena foi dada às fundamentações do Cálculo, muito menos ao limite e seus detalhes.

Colin Maclaurin defendeu o tratamento dos fluxos de Newton, mas reverteu ao século XVII, com argumentos similares ao de Fermat que somente Arquimedes ocasionalmente tinha usado. Apesar de suas boas intenções, Maclaurin deixou passar a oportunidade de perceber a sugestão de Newton sobre limites.

D'Alembert era o único cientista da época que reconheceu explicitamente a centralidade do limite no Cálculo.

Em sua famosa Encyclopédie, D'Alembert afirmou que a definição apropriada ao conceito de derivada requer a compreensão de limite primeiramente, e então deu a definição: Um valor é dito ser o limite de um outro valor quando o segundo pode se aproximar do primeiro dentro de algum valor dado, de qualquer modo pequeno, embora o segundo valor nunca possa exceder o valor ao qual se aproxima.

Em termos gerais, D'Alembert percebeu, que a teoria dos limites era a "verdadeira metafísica do Cálculo".

Em 1784, a Academia de Ciências de Berlim ofereceu um prêmio para quem explicasse com sucesso uma teoria do infinito pequeno e do infinito grande na matemática e que pudesse ser usado no Cálculo como um fundamento lógico e consistente. Embora esse prêmio tenha sido ganho por Simon L'Huilier (1750 - 1840) pelo seu trabalho "longo e tedioso", este não foi considerado uma solução para os problemas propostos.

Lazare N. M. Carnot (1753 - 1823) propôs uma tentativa popular de explicar o papel do limite no Cálculo como "a compensação dos erros", mas não explicou como estes erros se balançariam sempre perfeitamente.

Já no final do século XVIII, o matemático Joseph-Louis Lagrange - o maior do seu tempo - tinha elaborado uma reformulação sobre a mecânica

em termos do Cálculo. Lagrange focalizou sua atenção nos problemas da fundamentação do Cálculo. Sua solução tinha como destaque "toda a consideração de quantidades infinitamente pequenas, dos limites ou dos fluxos".

Lagrange fez um esforço para fazer o Cálculo puramente algébrico eliminando inteiramente os limites.

Durante todo o século XVIII, pouco interesse em relação aos assuntos sobre a convergência ou a divergência de sequências infinitas e séries havia aparecido. Em 1812, Carl Friedrich Gauss compôs o primeiro tratamento rigoroso de convergência para sequências e séries, embora não utilizasse a terminologia dos limites.

Em sua famosa teoria analítica do calor, Jean Baptiste Joseph Fourier tentou definir a convergência de uma série infinita sem usar limites, mas mostrando que, respeitadas certas hipóteses, toda função poderia ser escrita como uma soma de suas séries.

No começo do século XVIII, as ideias sobre limites eram certamente desconcertantes.

Já no século XIX, Augustin Louis Cauchy estava procurando uma exposição rigorosamente correta do Cálculo para apresentar a seus estudantes de engenharia na École Polytechnique de Paris.

Cauchy começou seu curso com uma definição moderna de limite. Em suas notas de aula, que se tornaram *papers* clássicos, Cauchy usou o limite como a base para a introdução precisa do conceito de continuidade e de convergência, de derivada, de integral. Entretanto, a Cauchy tinham passado despercebidos alguns dos detalhes técnicos.

Niels Henrik Abel (1802 - 1829) e Peter Gustav Lejeune Dirichlet estavam entre aqueles que procuravam por problemas delicados e não intuitivos.

Entre 1840 e 1850, enquanto era professor da High School, Karl Weierstrass determinou que a primeira etapa para corrigir esses erros deveria começar pela definição de limite de Cauchy em termos aritméticos estritos, usando-se somente valores absolutos e desigualdades.

8.2 Objetivo

Na matemática, o limite tem o objetivo de determinar o comportamento de uma função à medida que ela se aproxima de alguns valores, sempre relacionando os pontos x e y .

Utilizando a função $y = x + 1$, vamos determinar os valores de y à medida que x assume alguns valores. Veja:

x	$y = x + 1$
-2	-1
-1	0
1	2
2	3

Note que à medida que x se aproxima de -2 , o valor de y se aproxima de -1 , isto é, quando x tende a -2 ($x \rightarrow -2$), y tende a -1 ($y \rightarrow -1$). Portanto:

$$x \rightarrow -1, y \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow 1, y \rightarrow 2$$

$$x \rightarrow 2, y \rightarrow 3$$

A utilização de limites ajuda na compreensão de diversas situações envolvendo funções, através de pontos notáveis como mínimo e máximo ou até mesmo os pontos de intersecção entre funções, a continuidade de funções também utiliza as noções de limites, bem como os problemas envolvendo séries numéricas convergentes ou divergentes.

Vamos trabalhar a função $f(x) = x^2$, mostrando que à medida que os valores de x aproximam de 3, pela esquerda ou pela direita, a função se aproxima do valor 9.

Pela direita

$$f(3,1) = (3,1)^2 = 9,61$$

$$f(3,01) = (3,01)^2 = 9,06$$

$$f(3,001) = (3,001)^2 = 9,006001$$

$$f(3,0001) = (3,0001)^2 = 9,00060001$$

Pela esquerda

$$f(2,9) = (2,9)^2 = 8,41$$

$$f(2,99) = (2,99)^2 = 8,9401$$

$$f(2,999) = (2,999)^2 = 8,994001$$

$$f(2,9999) = (2,9999)^2 = 8,99940001$$

Observe que à medida que os valores se aproximam de 3, tanto pela direita quanto pela esquerda, a imagem da função $f(x) = x^2$, fica mais próxima do valor 8.

Exemplo:

Dada a função $f(x) = 4x + 1$, determine a sua imagem à medida que o valor de x tende a 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x+1) = 4 \cdot 2 + 1 = 9$$

$$f(x) = 4x + 1 \rightarrow f(2) = 4 \cdot 2 + 1 \rightarrow f(2) = 9$$

Vamos determinar o limite da função:

$$f(x) = x^2 - 5x + 3, \text{ quando } x \text{ tende a } 4.$$

Nesse caso devemos aplicar a seguinte regra: o limite das somas é a soma dos limites.

Portanto, devemos determinar o limite de cada monômio e depois realizar a soma entre eles.

$$\lim_{x \rightarrow 4} x^2 = 4^2 = 16$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} -5x = -5 \cdot 4 = -20$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} 3 = 3$$

$$16 - 20 + 3 = -1$$

$$\text{Então: } \lim_{x \rightarrow 4} x^2 - 5x + 3 = -1$$

Calcular o limite da função, $f(x) = 2x - 3/x - 2$ quando x tende a -2 .

$$\lim_{x \rightarrow -2} 2x - 3 = 2 \cdot (-2) - 3 = -7$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} x - 2 = -2 - 2 = -4$$

$$\text{Então: } \lim_{x \rightarrow -2} 2x - 3/x - 2 = -7/-4 = 7/4$$

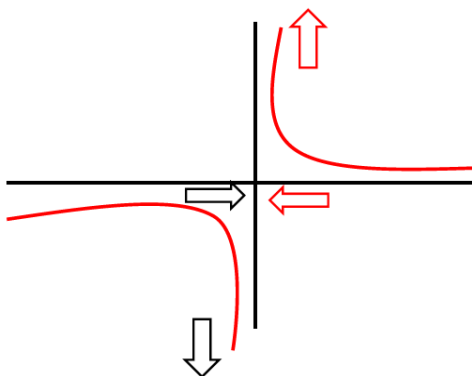
8.3 Teoremas

- 1 – O limite da soma de duas ou mais funções de mesma variável deve ser igual à soma dos seus limites.
- 2 – O limite do produto de duas ou mais funções de mesma variável deve ser igual a multiplicação de seus limites.
- 3 – O limite do quociente de duas ou mais funções de mesma variável deve ser igual à divisão de seus limites, ressaltando que o limite do divisor seja diferente de zero.
- 4 – O limite da raiz positiva de uma função é igual à mesma raiz do limite da função, lembrando que esta raiz precisa ser real.:

Exemplo: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ não existe.

Para verificar esse fato basta observar o gráfico

$f(x) = \frac{1}{x}$
da função abaixo:



De fato, quando x tende a zero por valores maiores do que zero, seu inverso tende a $+\infty$

E quando x tende a zero por valores menores do que zero, seu inverso tende a $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{6}}{x-2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

No cálculo do limite em primeiro lugar que o Teorema sobre as propriedades dos limites não pode ser utilizado pois, embora o numerador e o denominador tenham limite, o limite do denominador é zero, contrariando uma das hipóteses do Teorema.

Entretanto, o numerador e o denominador tendem a zero e isso nos garante que 2 é raiz de ambos os termos da fração: $(x-2)$ e . Esse fato nos indica o artifício a ser utilizado, pois, através dele obteremos o fator $(x-2)$ em ambos os termos da fração.

Com efeito, multiplicando o numerador e o denominador pela expressão conjugada do numerador - que é onde temos uma diferença de radicais - nos livramos dessa diferença obtendo um fator que permite a simplificação da fração. Vejamos:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{6}}{x-2} &= \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{6}}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{6}}{\sqrt{x+4} + \sqrt{6}} \\ &= \frac{(\sqrt{x+4})^2 - (\sqrt{6})^2}{(x-2) \cdot (\sqrt{x+4} + \sqrt{6})} = \\ &= \frac{x-2}{(x-2) \cdot (\sqrt{x+4} + \sqrt{6})} = \frac{1}{(\sqrt{x+4} + \sqrt{6})} \end{aligned}$$

É preciso notar que a simplificação por $(x-2)$ foi possível, pois $(x-2)$ não é igual a zero.

Assim

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{6}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{x+4} + \sqrt{6})} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Sendo que, na última igualdade utilizamos o Teorema sobre as propriedades dos limites, pois agora os limites de ambos os termos da fração existem e o do denominador não é zero.

É preciso notar que o limite do numerador é 0, bem como o limite do denominador. Nesse caso o Teorema sobre as propriedades dos limites não pode ser aplicado.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} = \frac{1}{4}$$

O limite é semelhante ao anterior.

Novamente observamos que o Teorema sobre as propriedades dos limites não pode ser utilizado pois, embora o numerador e o denominador tenham limite, o limite do denominador é zero, contrariando uma das hipóteses.

Entretanto, o numerador e o denominador tendem a zero e isso nos garante que 0 é raiz de ambos os termos da fração: x^2 e $(\sqrt{x^2 + 4} - 2)$. Este fato nos indica o artifício a ser utilizado, pois, através dele obteremos o fator x^2 em ambos os termos da fração.

Multiplicando o numerador e o denominador pela expressão conjugada do numerador - que é onde temos uma diferença de radicais - nos livramos desta diferença obtendo um fator que permite a simplificação da fração. Vejamos:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} &= \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 4} + 2}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} = \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 + 4})^2 - 4}{x^2 (\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \frac{x^2}{x^2 (\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} \end{aligned}$$

É preciso notar que a simplificação por x^2 foi possível, pois x^2 não é igual a zero.

Logo, utilizando o Teorema, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} = \frac{1}{4}$$

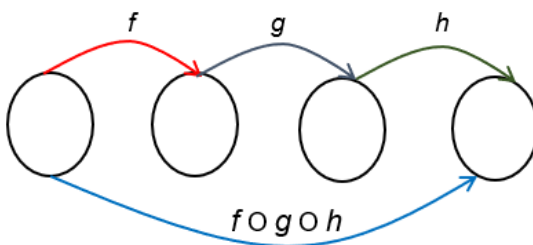
9. COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Trabalhar com funções compostas não apresenta grandes segredos, mas requer muita atenção e cuidado. Quando lidamos com uma composição de três ou mais funções, sejam elas do 1º grau ou do 2º grau, maior deve ser a preocupação. Antes de analisar alguns exemplos, vamos compreender a ideia central da composição de funções.

Imagine que você pretende fazer uma viagem de avião saindo do Rio Grande do Sul com destino ao Amazonas. Uma empresa aérea oferece uma passagem de voo direto e outra opção mais econômica, com três pontes aéreas, conforme o esquema a seguir:

Rio Grande do Sul $\rightarrow$ São Paulo $\rightarrow$ Goiás $\rightarrow$ Amazonas

Qualquer uma das opções de viagem levará ao destino pretendido, e assim também ocorre com a função composta. Veja a imagem a seguir:



Exemplo:

Ao considerarmos as funções $f(x) = 4x$ e $g(x) = x^2 + 5$, determinaremos:

a) $g \circ f$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$g(x) = x^2 + 5$$

$$g(4x) = (4x)^2 + 5$$

$$g(4x) = 16x^2 + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 16x^2 + 5$$

b) f o g

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$f(x) = 4x$$

$$f(x^2 + 5) = 4 * (x^2 + 5)$$

$$f(x^2 + 5) = 4x^2 + 20$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4x^2 + 20$$

Vamos determinar $g(f(x))$ e $f(g(x))$, em relação às funções $f(x) = x + 2$ e $g(x) = 4x^2 - 1$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$g(x) = 4x^2 - 1$$

$$g(x + 2) = 4 * (x + 2)^2 - 1$$

$$g(x + 2) = 4 * (x + 2) * (x + 2) - 1$$

$$g(x + 2) = 4 * (x^2 + 2x + 2x + 4) - 1$$

$$g(x + 2) = 4 * (x^2 + 4x + 4) - 1$$

$$g(x + 2) = 4x^2 + 16x + 16 - 1$$

$$g(x + 2) = 4x^2 + 16x + 15$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 4x^2 + 16x + 15$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$f(x) = x + 2$$

$$f(4x^2 - 1) = (4x^2 - 1) + 2$$

$$f(4x^2 - 1) = 4x^2 - 1 + 2$$

$$f(4x^2 - 1) = 4x^2 + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4x^2 + 1$$

Sejam as funções: $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x - 3$ e $h(x) = x^2$.

A composição $f \circ g \circ h$ (lê-se: f composta com g composta com h) pode ser mais facilmente interpretada ao ser expressa como $f(g(h(x)))$. Para resolver essa composição de funções, devemos começar pela função composta mais interna ou pela última composição, portanto, $g(h(x))$.

Na função $g(x) = 2x - 3$, onde houver x , substituiremos por $h(x)$:

$$g(x) = 2x - 3$$

$$g(h(x)) = 2.h(x) - 3$$

$$g(h(x)) = 2.(x^2) - 3$$

$$g(h(x)) = 2.x^2 - 3$$

Agora faremos a última composição $f(g(h(x)))$. Na função $f(x) = x + 1$, onde houver x , substituiremos por $g(h(x)) = 2.x^2 - 3$:

$$f(x) = x + 1$$

$$f(g(h(x))) = (2.x^2 - 3) + 1$$

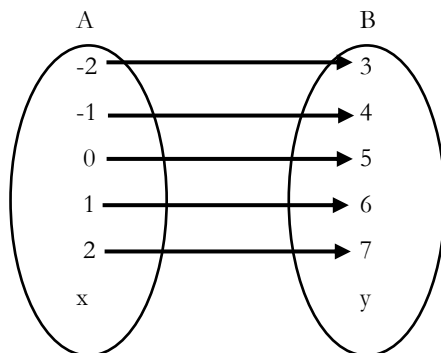
$$f(g(h(x))) = 2.x^2 - 3 + 1$$

$$f(g(h(x))) = 2.x^2 - 2$$

9.1 Funções Inversas

O objetivo de uma função inversa é criar funções a partir de outras. Uma função somente será inversa se for bijetora, isto é, os pares ordenados da função f deverão pertencer à função inversa f^{-1} da seguinte maneira: $(x,y) \in f^{-1}$ $(y,x) \in f$.

Dado os conjuntos $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ e a função $A \rightarrow B$ definida pela fórmula $f(x) = x + 5$, veja o diagrama dessa função a seguir:

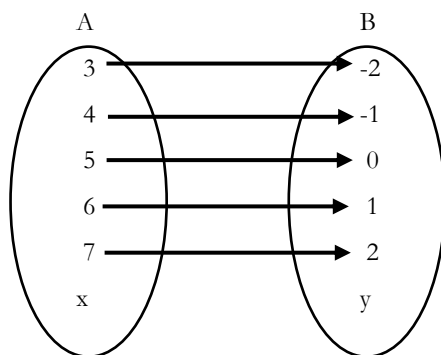


Então: $f = \{(-2, 3); (-1, 4); (0, 5); (1, 6); (2, 7)\}$

Essa função é bijetora, pois cada elemento do domínio está ligado com um elemento diferente no conjunto imagem. Assim, podemos dizer que essa função, por ser bijetora, admite inversa.

A sua função inversa será indicada por $f^{-1}: B \rightarrow A$, e será preciso realizar a troca entre x e y na função $y = x + 5$, dessa forma temos: $x = y + 5 \rightarrow -y = -x + 5 \rightarrow y = x - 5$, portanto $f^{-1}(x) = x - 5$.

Veja o diagrama abaixo:



Então: $f^{-1}(x) = \{(3, -2); (4, -1); (5, 0); (6, 1); (7, 2)\}$. O que é domínio na função f vira imagem na $f^{-1}(x)$ e vice e versa.

Dada uma sentença de uma função $y = f(x)$, para encontrar a sua inversa é preciso seguir alguns passos. Observe:

Dada a função $f(x) = 3x - 5$, para determinarmos a sua inversa $f^{-1}(x)$ precisamos fazer uma troca x e y na expressão $y = 3x - 5$.

Assim, tem-se $x = 3y - 5$, logo:

$$x = 3y - 5$$

$$-3y = -x - 5 \text{ (multiplicar por } -1\text{)}$$

$$3y = x + 5$$

$$y = (x + 5)/3$$

Portanto, a função $f(x) = 3x - 5$ terá inversa igual a $f^{-1}(x) = (x + 5)/3$.

Dada a função $f(x) = x^2$ a sua inversa será:

Realizando a troca entre x e y na expressão $y = x^2 \rightarrow x = y^2$, logo:

$$x = y^2$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y^2}$$

$$\sqrt{x} = y$$

$$y = \sqrt{x}$$

A função $f(x) = x^2$ terá inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Determine a inversa da função $f(x) = (2x+3)/(3x-5)$, para $x \neq 5/3$.

Realizando a troca entre x e y na expressão $y = (2x+3)/(3x-5) \rightarrow x = (2y+3)/(3y-5)$, logo:

$$x = (2y+3)/(3y-5)$$

$$x \cdot (3y-5) = 2y + 3$$

$$3yx - 5x = 2y + 3$$

$$3yx - 2y = 5x + 3$$

$$y(3x - 2) = 5x + 3$$

$$y = (5x+3)/(3x-2), \text{ para } x \neq 2/3.$$

10. SEM TREINO SEM CHANCE

1. Uma função cujo gráfico é uma parábola com a concavidade para baixo é do tipo:
 - a) $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c pertencentes aos Reais e $a > 0$
 - b) $f(x) = ax + b$, com a, b pertencentes aos Reais e $a > 0$
 - c) $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c pertencentes aos Reais e $a < 0$
 - d) $f(x) = ax + b$, com a, b pertencentes aos Reais e $a < 0$
 - e) $f(x) = ax$, com a pertencentes aos Reais e $a < 0$
2. Na função quadrática quando temos o valor do discriminante (Delta) menor que zero, podemos afirmar que a função:
 - a) Não possui raízes reais
 - b) Possui duas raízes reais e distintas
 - c) Possui duas raízes reais e iguais
 - d) Possui uma raiz real e uma complexa
 - e) Possui duas raízes complexas
3. O X_v (valor de x da coordenada do vértice) da função $f(x) = x^2 - 2x + 3$ é:
4. Considerando as afirmativas sobre o gráfico de uma função quadrática é correto afirmar que:
 - a) É uma curva chamada parábola.
 - b) A concavidade é voltada para cima se $a < 0$.
 - c) A concavidade é voltada para baixo se $a > 0$.
 - d) Se $a < 0$ a abscissa do vértice é um ponto de mínimo.
 - e) Se $a > 0$ a abscissa do vértice é um ponto de máximo.
5. Tomando por base que uma função é chamada de função do 2º grau em uma incógnita x quando é do tipo $ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são constantes reais, com $a \neq 0$, determine em que pontos o gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ intercepta o eixo x .
6. Considere a seguinte situação: a mensalidade do colégio ABC para o 20º ano do ensino médio é de R\$ 300,00 para pagamentos ocorridos no dia 30 de cada mês. Quando ocorre um atraso, existe

o pagamento de uma multa de R\$ 2,00 por dia de atraso. Considerando x o número de dias em atraso, marque a opção que descreve a função que calcula o valor desta mensalidade

7. Determine o valor de m para que a função $f(x) = (m + 5m - 12)$ seja zero.
8. Dada a função real $f(x) = -2x - 8$, determine a imagem da função para $x = -5$.
9. Uma escola de natação cobra de seus alunos uma matrícula de R\$ 80,00 mais R\$ 100,00 de mensalidade. Determine a função que representa o gasto do aluno(y) em relação aos meses de aula(x).
10. Um vendedor ganha R\$ 1.200,00 fixo mais R\$25,00 por seguro vendido. Determine a função que representa o salário y em relação ao número de seguros vendidos x :
11. Um garrafão de água mineral contendo 20 litros foi colocado à disposição dos participantes de um evento. Considerando que os copos, com capacidade para 200 ml, eram servidos totalmente cheios, a expressão que representa a quantidade (y) de água, em mL, que restou no garrafão, em função do número (x) de copos, é:
12. Dada a função $f(x) = 9x - 45$. Determine o valor de x se $f(x) = 99$.
13. A função que representa o valor a ser pago após um desconto de 3% sobre o valor x de uma mercadoria é:
14. Sabendo-se que $\log x$ representa o logaritmo de x na base 10, calcule o valor da expressão $\log 20 + \log 5$.
15. O preço (P) a ser cobrado em um estacionamento em função do número de horas de permanência (h) segue a fórmula $P = 10,00 + 0,50 \cdot h$. Determine quanto vai ser pago por um usuário que deixa o carro estacionado por um período de 10 horas.

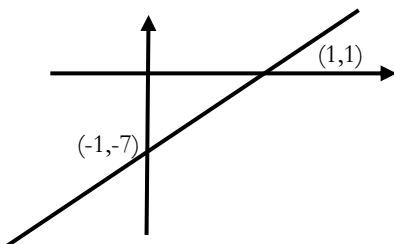
16. Uma loja vende um produto por R\$20,00, cada unidade, e cobra a taxa de R\$5,00 pela entrega, independentemente da quantidade comprada pelo cliente. Determine a expressão do valor total a ser pago em reais, $V(x)$, em função da quantidade x comprada incluindo a taxa de entrega.
17. O Salário de um funcionário é composto por uma parte fixa, de R\$ 500,00, e uma parte variável que depende de suas vendas de certo produto. Para cada produto vendido no mês, ele recebe R\$15,00. Assim, a Função que representa seu salário é:
18. Determine o valor máximo ou mínimo da função $f(x) = x^2 - x - 6$.
19. O custo de produção de um bem é fornecido pela função $C(x) = 350 + 50x$, onde x é a quantidade do bem e $C(x)$ o seu custo total na fabricação em reais. Determine o custo para a produção de 880 unidades.
20. Dada a função quadrática $f(x) = -2x^2 + 4x - 9$, as coordenadas do vértice do gráfico da parábola definida por $f(x)$, é:
21. Seja as funções:

$$F1(x) = x^2 - 2x - 8$$

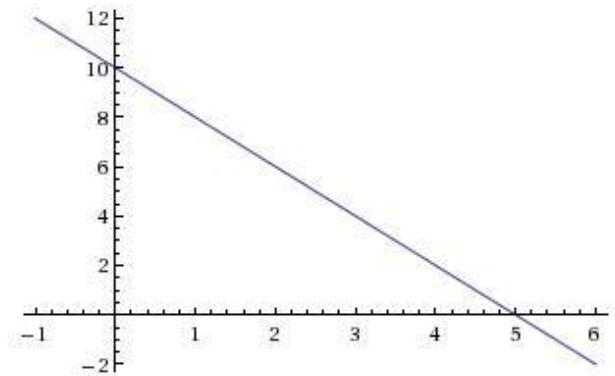
$$F2(x) = -x - 2.$$

Em que coordenadas, caso ocorram, as duas funções se tocam?

22. Em que pontos a função $x^2 - 8x + 15$, toca os eixos x e y ?
23. Dado o gráfico abaixo, apresente uma função que passe pelos 2 pontos mostrados. $(-1, -7)$ e $(1, 1)$



24. De acordo com a Função $Y = 4x + 3$, o coeficiente angular é igual a:
25. Se x e y são as coordenadas do vértice da parábola $y = 3x^2 - 5x + 3$, então $x + y$ é igual a:
26. A Função, $F(x) = -3x + 10$, calculado no ponto $X = -1$ resultará no par ordenado:
27. A função $P(t) = a + 2,5t$ onde “a” é uma constante, relaciona o valor total pago por um rapaz que utilizou os serviços de internet de uma empresa durante “t” horas. Determine o valor da constante “a”, sabendo que o valor total pago pelo período de 4 horas foi de R\$ 12,00.
28. Determine o valor de “p” de modo que o gráfico da função $f(x) = 3x + p - 2$ intercepte o eixo y no ponto de ordenada 4.
29. O gráfico da função $f(x) = mx + n$ passa pelos pontos (4, 2) e (-1, 6). Assim o valor de $m + n$ é:
30. Um tanque contém inicialmente 500 litros de água. Uma torneira despeja água neste tanque à razão constante de 10 litros de água por minuto.
Pede-se:
a) a lei da função que representa a situação acima;
b) o volume de água 10 minutos após a abertura da torneira.
31. A função de primeiro grau $y = ax + b$ é representada pelo gráfico abaixo:



A partir do conhecimento dos valores dos coeficientes angular e linear, pede-se obter a equação da reta que define a lei de formação do gráfico acima.

32. O salário de um vendedor é formado por uma parte fixa (salário mínimo) de R\$ 200,00 e uma parte variável (comissão) de R\$5,00 por unidade vendida. Determine a expressão que relaciona o salário mensal y deste vendedor em função do número x de unidades vendidas e determine o salário deste vendedor se, em um mês, ele vendeu 20 unidades.
33. A função f é definida por $f(x) = ax + b$. Sabe-se que $f(-1) = 3$ e $f(1) = 1$. Qual é o valor de $f(3)$?
34. Determine a lei de formação da função afim f , sabendo que $f(1) = 5$ e $f(-3) = -7$.
35. Dada uma função $f(x) = ax + 2$, determine o valor de a para que se tenha $f(4) = 20$.
36. Para calcular o lucro com a venda de determinado produto, pode-se utilizar a expressão $L = 0,5x + 20$, sendo x o número de produtos vendidos e L o lucro em reais. O lucro obtido na venda de 200 unidades desse produto será igual a:

37. Quando entramos em um táxi o taxímetro acusa um valor que é chamado de bandeirada, e, a cada quilômetro rodado, o valor que aparece no taxímetro é acrescido de uma constante. Hoje a bandeirada é R\$4,00 e o valor do quilômetro rodado R\$0,67. João é taxista e, para pagar suas despesas, ele estipulou uma meta diária de no mínimo R\$339,00. Para atingir o valor mínimo da sua meta, João tem que rodar quantos quilômetros por dia?
38. Um comerciante teve uma despesa de 230 reais na compra de um lote inteiro de uma certa mercadoria. Como vai vender a 5 reais a unidade da mercadoria deste lote, o lucro final será dado em função das x unidades vendidas. A lei dessa função f é definida por:
39. Um arquiteto cobra, como orçamento para uma obra, R\$ 100,00 por metro quadrado. Qual seria a função que disponibilizaria sempre o valor da obra em função do tamanho (metragem quadrada) do ambiente?
40. Se uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tem como imagem para $x = 2$, $y = 4$, e para $x = 4$, $y = 8$, sabendo que seu gráfico é uma reta, a imagem para $x = \underline{\hspace{1cm}}$ é $y = 20$.
41. Uma fábrica definiu seu custo de produção através da função $Y = 12x + 18.200$. Se forem produzidos 120 produtos, qual será o custo total de produção?
42. Seja a função $f(x) = -3x + 2$. Determine o valor de x de modo que $f(x)$ seja -19.
43. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x + m$, em que m é uma constante real. Calcular m , sabendo que $f(-2) = 5$
44. Determine a raiz da função $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$
45. Dada a função $f(x) = 6x + 4$, determine $f(-3) + f(1) + f(0)$.
46. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função do primeiro grau, onde $f(x) = 2x - 4$. O gráfico de f toca o eixo y no ponto?
47. A raiz da função do primeiro grau $f(x) = 3x - 18$ é:

48. Como se comportam os valores da função: $y = x^2 + 2x + 1$ quando x se aproxima do ponto $p = 3$?
49. No logaritmo: $\log_3 81 = x$, o valor de x é:
50. O valor de $3 \cdot \log 3 + \log 5$ é:
51. Considerando a função $f(x) = 5x + 2$, os resultados de $f(2)$ e $f(3)$ são, respectivamente:
52. Qual é o valor da expressão: $\log_{1/2} 32 = x$
53. A função $L(x) = -x^2 + 14x - 40$ expressa o lucro diário de uma fábrica na venda de x peças de sua produção. Quantas peças devem ser vendidas, diariamente, para que o lucro seja máximo?
54. Dada a função $f(x) = mx + b$, determine “m”, sabendo que $f(1) = 6$ e que a reta corta o eixo y em $(0,3)$.
55. Resolva a equação e responda qual a soma dos valores de x . $2^{x^2 - 3x - 4} = 1$
56. Resolva a equação $3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$
57. O valor de X e X é Real, que solução da equação $5^{x+3} = (1/125)^{x+3}$ é:
58. Determine as coordenadas do vértice referente a função $f(x) = -x^2 + 4x$.
59. A produção de uma fábrica vem aumentando ano a ano. Num certo ano, ela produziu mil unidades de seu produto principal. A partir deste período a produção anual passou a seguir a lei $f(x) = 1000 \cdot (1,2)^x$, onde x representa o tempo em anos. O número de unidades produzidas no trigésimo sexto mês após este período é:
60. A imagem da função $f(x) = 2^{2x-3}$, sendo que o valor de x é a maior raiz da função $f(x) = x^2 - 5x + 4$, é:
61. A trajetória da bola, num chute a gol, descreve uma parábola dada pela função $y = -2x^2 + 12x$. Supondo que sua altura h , em metros, t segundos. Em que instante a bola atinge a altura máxima

62. A trajetória da bola, num chute a gol, descreve uma parábola. Supondo que sua altura h , em metros, t segundos após o chute, seja dada por $h = -t^2 + 6t$, pede-se:
- a) em que instante a bola atinge a altura máxima?
 - b) qual é a altura máxima atingida pela bola?
63. Determine o valor de m para que o ponto $A(2,1)$ pertença à parábola que representa graficamente a função dada por: $f(x) = (m+1)x^2 - 1$
64. Uma fábrica de bicicletas tem sua função custo de produção definida como $C(x)=5x-50$, onde x é a quantidade de bicicletas produzidas. Usando limites, qual o valor do custo desta produção quando se aproximar de 50 bicicletas no mês.
65. Considerando a função exponencial:
 $y = 2^{x-1}$. Calcule o valor de x para $y = 16$.
66. Uma planta cresce de acordo a função:
 $y = 2x - 1$, onde y representa a altura da planta (em cm) e x representa o tempo (em dia). Determine a altura da planta após 7 dias.
67. Uma escola de natação cobra de seus alunos uma matrícula de R\$ 100,00 mais R\$ 120,00 de mensalidade. Qual a função que representa o gasto do aluno y em relação aos meses de aula x ?
68. O lucro de uma empresa é dado pela função: $y = 50x - 20000$, onde y é o lucro em reais e x o número de peças vendidas. Determine o lucro da empresa num mês em que foram vendidas 500 peças.
69. Um alimento mal conservado apresenta uma bactéria que se reproduz segundo a lei $f(t) = 100 \cdot 4^t$, onde t é o número de horas e $f(t)$ é o número de bactérias. Determine o número de bactérias após 3 horas.
70. Em uma pesquisa de laboratório, verificou-se que, em certa cultura de bactérias, o seu número variava segundo a lei $N(t)=300 \cdot 3^t$, na qual t é o tempo em horas. Qual o número de bactérias após 4 h?

71. Em uma pesquisa de laboratório, verificou-se que, em certa cultura de bactérias, o seu número variava segundo a lei $N(t)=50.2^t$, na qual t é o tempo em horas. Qual o tempo necessário para atingir uma população de 800 bactérias?
72. Em uma pesquisa de laboratório, verificou-se que, em certa cultura de bactérias, o seu número variava segundo a lei $N(t)=500.2^t$, na qual t é o tempo em horas. Qual o número de bactérias após 4 h?
73. Por meio de uma pesquisa de laboratório, verificou-se que, em certa cultura de bactérias, o seu número variava segundo a lei $B(t)=100.2^t$, na qual t é o tempo em horas. Indique o tempo necessário para que o número de bactérias chegue a 12.800.
74. A função $f(x) = (2k - 3)^x$ é crescente quando k for?
75. Por meio de uma pesquisa de laboratório, verificou-se que, em certa cultura de bactérias, o seu número variava segundo a lei $B(t)=100.2^t$, na qual t é o tempo em horas. Qual o número de bactérias após 5 hora?
76. Verificou-se que, por meio de uma pesquisa de laboratório, em certa cultura de bactérias, o seu número variava segundo a lei $B(t)=200.2^t$, na qual t é o tempo em horas. Qual o número de bactérias após 3 horas?
77. Uma corretora de valores fez uma previsão de que uma ação de uma empresa valorizará segunda a lei $v(t) = 30. (2)^t$, onde t é o número de meses contados a partir de hoje. Sabendo disso, a ação valerá hoje e daqui 3 meses, respectivamente:
78. Uma pessoa depositou 100 reais na caderneta de poupança e, mensalmente, são creditados juros de $i = 1\%$ sobre o saldo. Sabendo que a fórmula do montante (capital C + rendimento), após x meses, é $M = C. (1 + i)^x$, o montante aproximado, em reais, após 2 meses será igual a:
79. Considerando que a expressão $Y = Y_0 (1 + K)^n$ é conhecida como função exponencial, onde Y_0 é o valor inicial, Y o valor final, K a taxa por unidade de tempo de crescimento positivo ou negativo, e “ n ” o tempo decorrido na mesma unidade de K , determine o valor

de um automóvel que hoje vale R\$ 20.000,00 e sofre uma desvalorização de 10% ao ano, daqui a dois anos.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

80. Resolva o limite:

81. Resolva: $\log_{(x-3)} 9 = 2$

82. Resolva a equação exponencial:

$$3^x + 3^{x-1} - 3^{x-2} = 11$$

83. Calcular os valores de x e y no sistema de equações exponenciais:

$$\begin{cases} 5^{x+1} = 1 \\ 3^x \cdot 9^y = 1/9 \end{cases}$$

84. Resolva a expressão: $27^{x-2} = 1/81$

85. Uma população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas. Assim, o número n de bactérias após t horas é dado pela função $N(t) = m \cdot 2^{t/3}$. Nessas condições, determine o tempo necessário para a população ser de 51.200 bactérias.

86. Qual é a imagem da função $f(x) = 3 - 3\cos(3x)$

87. A imagem da função $f(x) = 3 - 2\sin(2x)$ é:

88. Uma função do 1º grau é tal que $f(-1) = 5$ e $f(3) = -3$. Então $f(0)$ é igual a:

89. Resolva a equação exponencial: $\log_2 (x - 2) + \log_2 (x - 3) = 1 + \log_2 (2x - 7)$

90. Resolva a equação exponencial: $\log_3 x + 3/x - 1 = 1$

91. Resolva a equação exponencial: $(3/2)^x = 8/27$

92. Se $\log c = 2$ e $\log 8c = 8$, então o valor de $\log (32c)$ é?

93. Resolva a seguinte função exponencial:

$$3x - 1 + 3x + 1 = 90$$

94. O logaritmo de 16 na base 2 é igual a:
95. Se $\log 2 = 0,30$ então podemos afirmar que $\log 5$ é igual a:
96. O custo C , em reais, para se produzir x unidades de um determinado produto é dado pela função $C(x) = 2510 - 100x + 2x^2$. Quantas unidades deverão ser produzidas para se obter o custo mínimo?
97. A simplificação da expressão:
 $a^{(\log_a b)} + a^{(\log_a c)} + a^{(\log_a d)} \cdot a^{(\log_a e)}$:
98. Se $\log (2x - 5) = 0$, então x vale:

99. Resolva o limite: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

100. Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 18} \sqrt[3]{3x^2 - 9x + 918}$$

101. Dadas as alternativas sobre função assinala a alternativa correta.

- I - Na função $y = ax + b$, o gráfico é uma parábola, se a for positivo concavidade voltada para cima e se a for negativo concavidade voltada para baixo.
 - II - Na função $y = ax^2 + bx + c$, o c me indica onde o gráfico vai "cortar" o eixo y .
 - III - Na função $y = ax^2 + bx + c$, se $b=0$, o vértice estará em cima do eixo y .
- a) A alternativa correta é I
 - b) A alternativa correta é II
 - c) A alternativa correta é III
 - d) As alternativas corretas são II e III.
 - e) As alternativas corretas são I e III.

102. Resolva a equação exponencial:

$$3 \cdot 5^x = 75.$$

103. O valor de x que torna verdadeira a equação: $2^x \cdot 4^{x+1} \cdot 8^{x+2} = 16^{x+3}$ é:

104. O lucro mensal, em reais, de uma empresa é expresso pela lei $L(t) = 3\,000 \cdot (1,5)^t$, sendo $L(t)$ o lucro após meses. Qual o lucro dessa empresa após 2 meses?

105. Suponha que a taxa de juros no cartão de crédito seja 9% ao mês, sendo calculado cumulativamente. Em quantos meses uma dívida no cartão de crédito triplicará de valor? Utilize logaritmo natural: $\ln(3) = 1,08$ e $\ln(1,09) = 0,09$.

106. Obtenha a função do 1º grau na variável x que passa pelos pontos $(0, 1)$ e $(-3, 0)$:

107. A distância do vértice da parábola $y = -x^2 + 8x - 17$ ao eixo das abscissas é:

108. Resolva o limite:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x^2 - x + 3}{2x^2 + 3x - 8}$$

109. Resolva o limite:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2x - 1}}{2x^2 - 1}$$

110. Os valores de x que satisfazem $\log x + \log(x - 5) = \log 36$ são:

111. Resolva o limite:
$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$$

112. Dada a função f definida por:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{se } x \neq -3 \\ 4, & \text{se } x = -3 \end{cases}$$

Ache $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ e mostre que

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) \neq f(-3).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + x + 1}}{\sqrt{3x^2 + 4}}$$

113. Calcule o limite:

114. Resolva a equação $22x = 64x - 2$.

115. A quantidade de mercadorias a serem vendidas (Q) de acordo com a função $Q = 4P + 150$ quando o preço (P) for de R\$ 2,50 é de:

116. Qual o valor da função $y = 3x^2 + 10x + 30$ quando x tende a 2?

117. Qual o comportamento dos valores da função $f(x) = 3x + 2$, quando o valor de x se aproxima do ponto $P = 3$?

118. Suponha que a exportação de arroz no ano, dada pela função $y = 2x + 25$, qual será o comportamento da função quando o preço da saca se aproximar de R\$20,00?

119. O valor do $\lim(3x-4)$, quando x tende para 2 é:

120. A solução da inequação exponencial: $2^{5x-2} > 2^{x+6}$ é?

121. Sabe-se que a função custo mensal de uma indústria que produz relógios de parede é $C(x) = 12x - 40$, onde x é cada relógio produzido. Usando limites, qual o custo mensal desta indústria quando a quantidade produzida se aproximar de 20 unidades.

122. Suponha que em uma padaria os pães que saem do forno sejam vendidos de acordo com a função lucro $L(x) = (x + 4).(x^2 - 2x)$,

onde x representa cada pãozinho. Usando limites de uma função, determine o lucro desta padaria se a quantidade vendida se aproximar de 3 unidades.

123. Se $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,47$, então $\log 12$ é igual a:

124. As raízes da função quadrática $y = x^2 - 8x + 7 = 0$, são:

125. Resolver a equação exponencial: $2^{x+1} = 1/4$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

126. Resolva o limite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x^2 - 1}{3x^4 + 2x - 2}$$

127. Resolva o limite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 + x + 3}{3x^4 + x^3 - 1}$$

128. Resolva o limite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^7 + 3x^6 - 2x^5 + 9x^4 - x^3}{3x^7 + 6x^5 + 8x^2 - 20x + 5}$$

129. Resolva o limite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

130. Resolva o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x^2 - 2x - 5}{-x^2 + 3x + 4} \right)^3$$

131. Resolva o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

132. Resolva o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$$

133. Resolva o limite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-4x^3 + 7x}{2x^3 - 3x + 9} \right)$$

134. Resolva o limite:

135. Em certo experimento, pesquisadores, ao investigar o desenvolvimento de uma cultura de bactérias, constataram que esta população cresce segundo a expressão $N(t) = 768 \cdot 4^{t+1}$, em que $N(t)$ representa o número de bactérias e t indica o tempo observado em horas. Considerando que foi verificada a existência de um nível crítico, que é quando a cultura atinge 98304 bactérias, qual será o tempo necessário para que o número de bactérias alcance esse nível?

136. Resolva a equação $\log x (2x + 8) = 2$

137. O gráfico de $y = x^2 - 8x$ corta o eixo Ox nos pontos de abscissa:

138. A Função $F(x) = 7$, é definida como:

- a) Função Constante
- b) Função do Segundo Grau
- c) Função não linear
- d) Função Nula
- e) Função Modular

139. Dada a função de primeiro grau $f(x) = 2x - 4$, qual é o valor de $f(2)$?

140. Qual é o coeficiente angular (taxa de variação) da função de 1º grau $f(x) = 9x - 27$?

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} =$$

141. Calcule o limite:

142. Sabendo que $\log_{10}(2) \approx 0,301$, $\log_{10}(3) \approx 0,477$ e $\log_{10}(7) \approx 0,845$, Calcule: $\log_{10}(14)$.

143. Sabendo que $\log_{10}(2) \approx 0,301$, $\log_{10}(3) \approx 0,477$ e $\log_{10}(7) \approx 0,845$, calcule: $\log_{10}(\sqrt{27})$.

144. Determine: $2\text{Log}_2(12) - \text{Log}_2(9)$

145. Sabe-se que $\log_m 10 = 1,6610$ e que $\log_m 160 = 3,6610$, $m \neq 1$. Assim, o valor correto de “m” corresponde a:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} =$$

146. Calcule o limite:

147. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ Uma função do tipo $f(x) = k \cdot ax$, cujo gráfico passa pelos pontos (2,2) e (3,4). Determine o valor de k.

148. Se f^{-1} é a função inversa de f e $f(x) = 2x + 3$, calcule o valor de $f^{-1}(2)$.

149. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x + m$, em que m é uma constante real. Calcule m , sabendo que $f(-2) = 5$.

150. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função dada pela lei $f(x) = 2x + a$, sendo a uma constante real. Calcule $f(3)$ sabendo-se que $f^{-1}(9) = 7$.

151. Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (-3x + 8)/5$. Calcule:

- a) $f(3)$
- b) $f(-2)$
- c) o elemento cuja imagem é 2.

152. Seja $P(x) = 2x^2 + x - 1$. Calcule $P(2/3)$

153. Se $f(2x + 1) = x^2 + 2x$, calcule $f(2)$.

154. Se f é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x^3 + x^2$, calcule $f(0) + f(1) + f(-1)$.

155. Uma função de variável real satisfaz a condição $f(x+2) = 2f(x) + f(1)$, qualquer que seja a variável x . Sabendo que $f(3) = 6$, calcule $f(1)$.

156. Uma função de variável real satisfaz a condição $f(x + 2) = 2f(x) + f(1)$, qualquer que seja a variável x . Sabendo que $f(3) = 6$, calcule o valor de $f(1) + f(5)$.

157. O preço de ingresso numa peça de teatro (p) relaciona-se com a quantidade de frequentadores (x) por sessão através da relação $p =$

- $0,2x + 100$. Qual a receita arrecadada por sessão, se o preço de ingresso for R\$ 60,00? Qual o preço que deve ser cobrado para dar a máxima receita por sessão?
158. O gráfico de uma certa função afim passa pelo ponto (3, 22). Além disto sabe-se que $f(7) = 78$. Pergunta-se: Qual a ordenada do ponto desta função cujo valor da abscissa é igual a 12?
159. Uma função quadrática tangencia o eixo x no ponto (3, 0) e intercepta o eixo y no ponto (0, -9). Defina esta função.
160. A função real de variável real, definida por $f(x) = (3 - 2a)x + 2$, é crescente quando:
161. A função f é definida por $f(x) = ax + b$. Sabendo-se que $f(-1) = 3$ e $f(1) = 1$, o valor de $f(3)$ é:
162. A função linear $R(t) = at + b$ expressa o rendimento R , em milhares de reais, de certa aplicação. O tempo t é contado em meses, $R(1) = -1$ e $R(2) = 1$. Nessas condições, determine o rendimento obtido nessa aplicação, em quatro meses.
163. O preço de venda de um livro é de R\$ 25,00 a unidade. Sabendo que o custo de cada livro corresponde a um valor fixo de R\$ 4,00 mais R\$ 6,00 por unidade, construa uma função capaz de determinar o lucro líquido (valor descontado das despesas) na venda de x livros, e o lucro obtido na venda de 500 livros.
164. Sabendo que a função $f(x) = mx + n$ admite 5 como raiz e $f(-2) = -63$, o valor de $f(16)$ é:
165. Um táxi começa uma corrida com o taxímetro marcando R\$ 4,00. Cada quilômetro rodado custa R\$1,50. Se ao final de uma corrida, o passageiro pagou R\$ 37,00, a quantidade de quilômetros percorridos foi:
166. Um motorista de táxi cobra R\$ 3,50 de bandeirada (valor fixo) mais R\$ 0,70 por quilômetro rodado (valor variável). Determine o valor a ser pago por uma corrida relativa a um percurso de 18 quilômetros.

167. O salário de um vendedor é composto de uma parte fixa no valor de R\$ 800,00, mais uma parte variável de 12% sobre o valor de suas vendas no mês. Caso ele consiga vender R\$ 450 000,00, calcule o valor de seu salário.
168. Determine o zero da função $f(x) = x - 5$
169. Dada a função $f(x) = ax + 2$, determine o valor de a para que tenha $f(4) = 22$.
170. Dada a função de primeiro grau $f(x) = 2x + 3$, qual é o valor de $f(10)$?
171. Qual é o coeficiente linear da função $f(x) = 2x - 1$?
172. Qual é a raiz da função do 1º grau $f(x) = 5x + 15$?
173. Na função $f(x) = -3x + 18$, qual é o valor de $f(x)$ quando $x = 6$?
174. Qual é o coeficiente angular (taxa de variação) da função de 1º grau $f(x) = 9x - 27$?
175. Qual é a função inversa da função do primeiro grau $f(x) = x + 7$?
Assuma que $f^{-1}(x)$ é a função inversa.
176. Considere as seguintes funções: $f(x) = 4x - 1$ e $g(x) = x + 5$. Qual é o valor da função composta $f(g(3))$?
177. A função f é tal que $f(2x + 3) = 3x + 2$. Nestas condições, $f(3x + 2)$ é igual a:
178. Sendo f e g duas funções tais que $f \circ g(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 2 - x$ então $f(x)$ é:
179. Seja a função definida por $f(x) = (2x - 3) / 5x$. O elemento do domínio de f que tem $-2/5$ como imagem é:
180. Se x_1 e x_2 são os zeros da função $y = 3x^2 + 4x - 2$, então o valor de $1/x_1 + 1/x_2$ é igual a:
181. A função $g(x) = 84.x$ representa o gasto médio, em reais, com a compra de água mineral de uma família de 4 pessoas em x meses.

Essa família pretende deixar de comprar água mineral e instalar em sua residência um purificador de água que custa R\$ 299,90. Com o dinheiro economizado ao deixar de comprar água mineral, o tempo para recuperar o valor investido na compra do purificador ficará entre:

182. Determine os valores de m , para que a função $f(x) = (m - 2)x^2 - 2x + 6$ admita raízes reais.
183. O gráfico da função quadrática definida por $y = x^2 - mx + (m - 1)$, em que $m \in \mathbb{R}$, tem um único ponto em comum com o eixo das abscissas. Determine y associado ao valor de $x = 2$.
184. Determine os pontos de intersecção da parábola da função $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, com o eixo das abscissas.
185. Encontre o valor de $f(x) = x^2 + 3x - 10$ para que $f(x) = 0$
186. Uma bola, ao ser chutada num tiro de meta por um goleiro, numa partida de futebol, teve sua trajetória descrita pela equação $h(t) = -2t^2 + 8t$ ($t \geq 0$), onde t é o tempo medido em segundo e $h(t)$ é a altura em metros da bola no instante t . Determine, apos o chute:
- o instante em que a bola retornará ao solo.
 - a altura atingida pela bola.
187. O gráfico da função f , de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + 3x - 10$, intercepta o eixo das abscissas nos pontos A e B. A distância AB é igual a:
188. A solução da inequação $(x - 3)(-x^2 + 3x + 10) < 0$ é:
189. O lucro de uma loja, pela venda diária de x peças, é dado por $L(x) = 100(10 - x)(x - 4)$. O lucro máximo, por dia, é obtido com a venda de:
190. Considerando-se a função real $f(x) = -2x^2 + 4x + 12$, o valor máximo desta função é:
191. A razão entre a soma e o produto das raízes da equação
- $$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

192. A solução de $x - x^2 > 0$ é
193. O vértice da parábola que corresponde à função $y = (x-2)^2 + 2$ é
194. O valor mínimo do polinômio $y = x^2 + bx + c$ é:
195. O movimento de um projétil, lançado para cima verticalmente, é descrito pela equação . Onde y é a altura, em metros, atingida pelo projétil x segundos após o lançamento. A altura máxima atingida e o tempo que esse projétil permanece no ar corresponde, respectivamente, a:
196. Sabe-se que o custo de C para produzir x unidades de certo produto é dado pela expressão $C = x^2 - 80x + 3000$. Calcule o a quantidade de unidades produzidas para que o custo seja mínimo e o valor desse custo mínimo.
197. Considere $f(x) = \frac{x^2-1}{x-2}$ e $g(x) = x-1$. Calcule $f(g(x))$ para $x = 4$:
198. O transporte aéreo de pessoas entre duas cidades A e B é feito por uma única companhia em um único voo diário. O avião utilizado tem 180 lugares, e o preço da passagem p relaciona-se com o número x de passageiros por dia pela relação $p = 300 - 0,75x$. Qual a receita máxima possível por viagem?
199. Num certo planeta, uma bola é atirada para cima. Sua altura h , em metros, t segundos depois do lançamento é: $h(t) = 48t - 8t^2$. Qual é a altura máxima que a bola pode atingir?
200. Sejam f e g duas funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 3x$ e $g(x) = -2x + 1$, calcule a função $h(x) = g(f(x))$.
201. Sejam f e g duas funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 4x + 3$ e $g(x) = x - 1$, calcule:
- $f(g(x))$
 - $g(f(x))$

- c) $f(g(3))$
 d) $g(f(3))$

202. Sejam f e g duas funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 4x - 4$ e $g(x) = -2x^2 + x - 1$. Calcule $f(g(x)) = -8$

203. Se $f(x) = 3x - 4$ e $f(g(x)) = x + 4$, calcule $g(1)$.

204. Se $f(x) = x^5$ e $g(x) = x - 1$, a função composta $f[g(x)]$ será igual a:

205. Dadas as funções reais $f(x) = 2x - 6$ e $g(x) = ax + b$, se $f[g(x)] = 12x + 8$, o valor de $a + b$ é:

206. Suponha a função real $g(x) = x + 1$ e $f(x) = x^4$. Encontre a função decorrente da composição de $f(g(x))$.

207. As funções $f(x) = 3 - 4x$ e $g(x) = 3x + m$ são tais que $f(g(x)) = g(f(x))$, qualquer que seja x real. O valor de m é:

208. Se $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$ e $h(x) = -x^3 + 2x^2 - x$, determine o valor de $f(g(h(2)))$.

209. Sendo f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tais que $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = x^2$, o valor de $f(g(f(1)))$ é:

210. Dadas as funções $f(x) = 2x^2 - 4$ e $g(x) = 4x^2 - 2x$, se x satisfaz $f(x) = g(x)$, então $2x$ é:

211. Suponhamos que a população de uma certa cidade seja estimada,

para daqui a x anos, por $f(x) = 20 - \frac{1}{2^x} * 1000$. Determine a população referente ao terceiro ano.

212. Se $(0,4)^{4x+1} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$, então " x " vale:

213. Na função exponencial a seguir, calcule o valor de k . Considere uma função crescente. $g(x) = (3k + 16)^x$

214. Considerando que $f(x) = 49^x$, determine o valor de $f(1,5)$.

215. Numa certa cidade, o número de habitantes, num raio de r km a partir do seu centro é dado por $P(r) = k \cdot 23^r$, em que k é constante e $r > 0$. Se há 98 304 habitantes num raio de 5 km do centro, quantos habitantes há num raio de 3 km do centro?

216. Se $2^x + 2^{-x} = 10$ então $4^x + 4^{-x}$ vale:

217. Uma determinada máquina industrial se deprecia de tal forma que seu valor, t anos após a sua compra, é dado por $v(t) = v_0 \cdot 2^{-0,2t}$, em que v_0 é uma constante real. Se, após 10 anos, a máquina estiver valendo R\$ 12 000,00, determine o valor que ela foi comprada.

218. Se $f(x) = 16^{(1+1/x)}$, então $f(-1) + f(-2) + f(-4)$ é igual a:

219. O gráfico da função real $f(x) = x^2 - 2$:

- a) intercepta o eixo dos x no ponto $(1, 0)$;
- b) intercepta o eixo dos x no ponto $(0, 1)$;
- c) intercepta o eixo dos x no ponto $(2, 0)$;
- d) intercepta o eixo dos x no ponto $(0, -2)$;
- e) não intercepta o eixo dos x .

220. O número $x > 1$ tal que $\log_x 2 = \log_4 x$, é:

221. O número real x , tal que $\log_x \frac{9}{4} = \frac{1}{2}$, é:

222. Se $\log 8 = k$, então $\log 5$ vale:

223. Calcular $\log_2 32$

224. Calcular $\log_{1/15} 8$

225. Qual é o produto das raízes da equação $[\log(x)]^2 - \log(x^2) - 3 = 0$?

226. Dadas as funções $f(x) = 2x^2 - 4$ e $g(x) = 4x^2 - 2x$, se x satisfaz $f(x) = g(x)$, então $2x$ é:

227. Resolva a equação exponencial: $-5^{x-1} - 5^x + 5^{x+2} = 119$

228. A soma das raízes da equação $2^{2x+1} - 2^x + 4 = 2^{x+2} - 32$ é:

229. Um botânico, após registrar o crescimento diário de uma planta, verificou que o mesmo se dava de acordo com a função abaixo, com t representando o número de dias contados a partir do primeiro registro e $f(t)$ a altura (em cm) da planta no dia t . Nessas condições, é correto afirmar que o tempo necessário para que essa planta atinja a altura de 88,18 centímetros é:

$$f(t) = 0,7 + 0,04.3^{0,14t}$$

230. Resolva a equação exponencial: $2^{x+3} = \frac{1}{8}$

231. Resolva a equação exponencial:

$$5^{3x+1} = 25$$

232. Resolva a equação exponencial:

$$81^{x-2} = \sqrt[4]{27}$$

233. O produto das soluções da equação $(4^3 - x)^{2-x} = 1$ é:

234. As funções $y = a^x$ e $y = b^x$ com $a > 0$ e $b > 0$ e têm gráficos que se interceptam em:

- a) nenhum ponto;
- b) 2 pontos;
- c) 4 pontos;
- d) 1 ponto;
- e) infinitos pontos.

235. A produção de uma indústria vem diminuindo ano a ano. Num certo ano, ela produziu mil unidades de seu principal produto. A partir daí, a produção anual passou a seguir a lei $y = 1000.(0,9)^x$. O número de unidades produzidas no segundo ano desse período recessivo foi de:

236. O anúncio de certo produto aparece diariamente num certo horário na televisão. Após t dias do início da exposição (t exposições diárias), o número de pessoas (y) que ficam conhecendo o produto

237. é dado por $y = 3 - 3.(0,95)^t$, em que y é dado em milhões de pessoas. Para que valores de t teremos pelo menos 1,2 milhões de pessoas conhecendo o produto?

238. Os valores de x que satisfazem $\log x + \log (x - 5) = \log 36$ são:

239. Seja $x = 2^{1000}$. Sabendo que $\log 2$ é aproximadamente igual a 0,30103 pode-se afirmar que o número de algarismos de x é:

240. Sabendo-se que $5^n = 2$, podemos concluir que $\log_5 100$ é igual a:

241. Se $\log 123 = 2,09$, o valor de $\log 1,23$ é:

242. Se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, escrevendo $\log 32/27$ em função de a e b obtemos:

243. O número real x que satisfaz a equação $\log_2 (12 + 2^x) = 2x$ é:

244. Se $\log_{10} 8 = a$ então $\log_{10} 5$ vale

245. A soma das raízes da equação $\log_2 2^{x^2 - 3x + 5} = 3$ é:

246. Se $\log (3x+23) - \log (2x-3) = \log 4$, encontrar x .

247. Calcule o limite: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$:

248. Calcule o limite: $\lim_{x \rightarrow -4} (5x - 9)$

249. Calcule o limite: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

250. Calcule o limite: $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$

251. Calcule o limite: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 4x + 3}$

GABARITO

1	c
2	a
3	1
4	a
5	(3,0) e (2,0)
6	$M(x)=300+2x$
7	2
8	2
9	$y=80+100x$
10	$y=1200+25x$
11	$y=20000-200x$
12	16
13	$f(x)=0,97x$
14	2
15	R\$ 15,00
16	$V(x)=20x+5$
17	$f(x)=15x+500$
18	25
19	R\$ 44.350,00
20	$V(1,-7)$
21	(3,-5) e (-2,0)
22	Eixo x (3,0) e (5,0) - Eixo y (0,15)
23	$y=4x-3$
24	4
25	7/4
26	(-1,13)
27	2
28	p=6
29	22/5
30	a) $f(x)=500+10x$ b) 600 litros
31	$y=-2x+10$
32	$y=200+5x$ – R\$ 300,00
33	-1
34	$y=3x+2$
35	9/2
36	R\$ 120,00

37	R\$ 500,00
38	$L(x)=5x - 230$
39	$f(x)=100x$
40	10
41	19640
42	7
43	13
44	1/2
45	0
46	-4
47	6
48	16
49	4
50	135
51	12 e 17
52	-5
53	9
54	3
55	3
56	2
57	-3
58	$V(2,4)$
59	1728
60	32
61	3
62	a)3s e b)9m
63	$m=-1/2$
64	200
65	5
66	13
67	$y=120x+100$
68	R\$ 5.000,00
69	6400
70	24300
71	4h
72	8000
73	7
74	$k > 2$

75	3200
76	1600
77	R\$ 30,00 e R\$ 240,00
78	R\$ 102,01
79	R\$16.200,00
80	$1/2$
81	6
82	2
83	(2,-2)
84	$2/3$
85	27
86	(0,6)
87	(1,5)
88	3
89	4 e 5
90	3
91	3
92	12
93	3
94	4
95	0,70
96	25
97	b+c+d.e
98	3
99	1
100	12
101	d
102	2
103	2
104	R\$ 6.750,00
105	12 meses
106	$y=x/3+1$
107	1
108	+oo (mais infinito)
109	$1/2$
110	9
111	$5/5$
112	Lim é 0 e $f(-3)=4$
113	$\sqrt{2/3}$
114	3

115	160
116	62
117	11
118	65
119	2
120	$X > 2$
121	200
122	21
123	1,07
124	1 e 7
125	-3
126	12
127	0
128	$4/3$
129	3
130	$\sqrt{2/3}$
131	$1/8$
132	2
133	$3/4$
134	$3/4$
135	2h 30min
136	4
137	0 e 8
138	a
139	0
140	9
141	$-3/2$
142	1,146
143	0,716
144	4
145	4
146	2
147	$1/2$
148	$-1/2$
149	13
150	-5
151	a)-1/5, b)2/5 c)-2/3
152	$5/9$
153	$5/4$
154	2

155	2
156	19
157	a) R\$12.000,00 e b) R\$50,00
158	148
159	$f(x)=x^2+6x-9$
160	$a < 3/2$
161	-1
162	R\$ 5.000,00
163	$L(x)=19x-4$ e R\$9.496,00
164	99
165	22
166	R\$ 16,10
167	R\$54.800,00
168	5
169	5
170	23
171	-1
172	3
173	0
174	9
175	$f^{-1}(x)=x-7$
176	31
177	$2x+3$
178	$2 - 2x$
179	-3
180	3
181	3 e 4 meses
182	$m \leq 13/6$
183	1
184	(1,0) e (1/2,0)
185	2 e -5
186	a)4s b)8m
187	7
188	$-2 < x < 3$ ou $x > 5$
189	7 peças
190	14
191	7/3
192	(0,1)
193	(2,2)
194	-9/4

195	250m e 5s
196	40 peças e R\$ 1.400,00
197	8
198	R\$29.700,00
199	72m
200	$-6x+1$
201	a)4x-1, b)4x+2, c)11 e d)14
202	(0,1/2)
203	3
204	$x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$
205	13
206	$x^4+4x^3+6x^2+4x+1$
207	-6/5
208	16
209	11
210	4
211	19875 hab.
212	-1/3
213	$k > -5$
214	343
215	1536
216	98
217	R\$48.000,00
218	13
219	a
220	$2^{\sqrt{2}}$
221	81/16
222	$1 - 1/3.k$
223	5
224	-3/4
225	100
226	4
227	1
228	4
229	50 dias
230	-6
231	1/3
232	35/16
233	6
234	d

235	810
236	10
237	9
238	301
239	$(2+2n)/n$
240	0,09
241	$5a-3b$
242	2

243	$1 - a/3$
244	3
245	7
246	6
247	-29
248	$-3/2$
249	2
250	$3/2$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRINI, Á. Novo Praticando Matemática. Álvaro Andrini, Maria José C. de V. Zampirolo. – São Paulo: Editora do Brasil, 2002.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações. 3. ed. São Paulo: Ática, 2013.

DEGENSZAJN, David; HAZZAN, Samuel. IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar. Matemática Comercial, Matemática Financeira, Estatística Descritiva. Vol. 11. São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. Temas e Problemas Elementares. Coleção do Professor de Matemática. 2ª Edição. Rio de Janeiro. SBM. 2005.

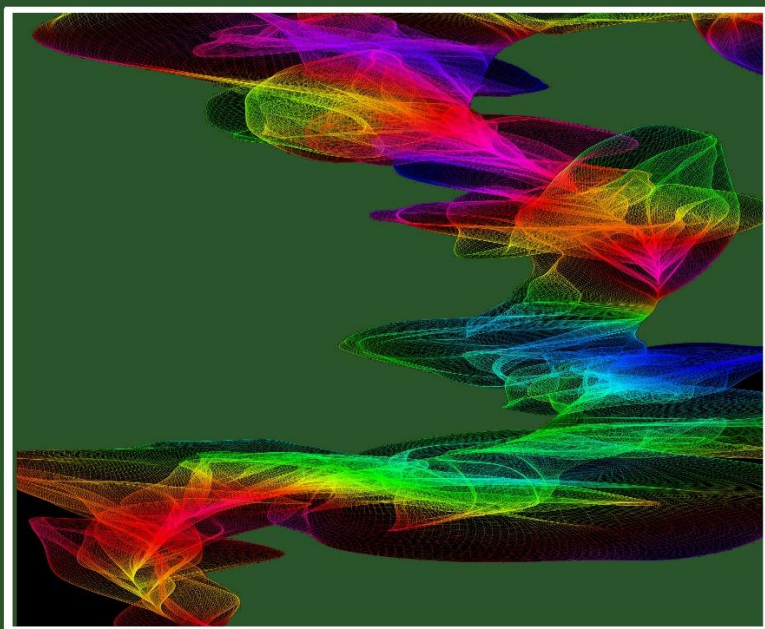
SOUZA, Joamir Roberto de. Novo Olhar Matemática. – 1 ed. – São Paulo: FTD, 2010. – (Coleção novo olhar; v. 2)

YOUSSEF, Antonio Nicolau. Matemática: ensino médio, volume único / Antonio Nicolau Youssef, Elizabeth Soares, Vicente Paz Fernandez. – São Paulo: Scipione, 2005.



CENTRO UNIVERSITÁRIO ESTÁCIO DO CEARÁ
Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa e Extensão
Núcleo de Publicações Acadêmico-Científicas

SÉRIE RESUMO INTELIGENTE



FUNÇÕES MATEMÁTICAS

com 250 exercícios resolvidos

José Antonio Farias Coelho

ISBN: 978-85-69235-21-7



Estácio